

Vjerojatnost

Zadaci za vježbu

1. Slučajno izvlačimo dvije karte iz špila od 52 karte. Koja je vjerojatnost da su obje karte dvojke?

$$\left[\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = 0,45\% \right]$$

2. Kocka je bačena dva puta. Neka je A događaj “suma je 4”, a B “bar jedno bacanje je 3”. Izračunajte uvjetnu vjerojatnost $p(A|B)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

$$\left[p(B) = \frac{11}{36}, p(A \cap B) = \frac{2}{36}, p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{11}, p(A) = \frac{3}{36}, p(A \cap B) \neq p(A)p(B), \right.$$

tj. A i B su zavisni.

3. Bačene su dvije kocke. Ako su pali različiti brojevi, koja je vjerojatnost da im je suma parna.

$$\left[A \dots \text{pali su različiti brojevi}, B \dots \text{suma je parna. } p(A) = \frac{30}{36}, p(A \cap B) = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{36} \text{ (oba}$$

parna ili oba neparna), } p(B|A) = \frac{12}{30} = 40\%. \right]

4. Osiguravajuće društvo klasificira vozače u tri klase: A (rizični), B (srednje rizični) i C (malo rizični). Udio vozača klase A u skupu svih vozača iznosi 20%, vozača klase B 65% i vozača klase C 15%. Vjerojatnost da će vozač klase A skriviti prometnu nezgodu u godini dana je 3%, vozač klase B 2% i vozač klase C 1%. Ako je vozač u godini dana skrivio nesreću, koja je vjerojatnost a je to vozač klase A , B , odnosno C ?

$$\left[N \dots \text{odabrani vozač je skrivio nesreću, } H_1 \dots \text{odabrani vozač je klase } A, H_2 \dots$$

odabrani vozač je klase B , $H_3 \dots$ odabrani vozač je klase C ; $p(H_1|N) = \frac{p(H_1 \cap N)}{p(N)} =$

$$\frac{p(N|H_1)p(H_1)}{p(N|H_1)p(H_1) + p(N|H_2)p(H_2) + p(N|H_3)p(H_3)} = \frac{0,006}{0,006 + 0,013 + 0,0015} = 29,3\%, \text{ analogno } p(H_2|N) =$$

63,4% i $p(H_3|N) = 7,3\%$]

5. U kutiji se nalaze 24 kuglice: 20 crnih i 4 bijele. Kuglice izvlačimo jednu za drugom (bez vraćanja) sve dok ne izvučemo crnu. Slučajna varijabla je jednaka broju izvučenih kuglica. Odredite joj tablicu distribucije, očekivanje i standardnu devijaciju.

$$\left[X = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{20}{24} & \frac{4 \cdot 20}{24 \cdot 23} & \frac{4 \cdot 3 \cdot 20}{24 \cdot 23 \cdot 22} & \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 20}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} & \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} \end{array} \right), \mu = 1,19, \sigma = 0,462. \right]$$

6. Odredite vjerojatnost dobivanja barem jedne sedmice (suma brojeva na paru kocki) u 3 bacanja para kocki.

$$\left[\text{Za jedno bacanje para kocki vjerojatnost pojavljivanja sedmice je } p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ (po-}$$

voljni elem. dog. su $(1,6), (2,5), \dots, (6,1)$ – ima ih 6). Broj pojavljivanja sedmice u

tri bacanja predstavlja binomnu sluč. var. $X \sim B(3; \frac{1}{6})$. $p(\{X \geq 1\}) = 1 - p(\{X =$

$0\}) = 1 - \binom{3}{0} p^0 q^3 = \frac{91}{216} = 42\%.$]

7. Određena operacija uspijeva u 90% slučajeva.

- a) Koliko je vjerojatno da točno 8 od 10 pacijenata ima uspješnu operaciju?
- b) Koliko je vjerojatno da barem 8 od 10 pacijenata ima uspješnu operaciju?

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sluč. var. } X \text{ broji uspješne operacije: } X \sim B(10; 0,9). \text{ a) } p(\{X = 8\}) = \\ \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 = 19,4\%; \text{ b) } p(\{X \geq 8\}) = \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 + \binom{10}{9} 0,9^9 0,1^1 + \binom{10}{10} 0,9^{10} 0,1^0 = \\ 93,0\%. \end{array} \right]$$

8. Ako je utvrđeno da je $p = 0,8$ vjerojatnost pojavljivanja određene kolonije mikroorganizama pod zadanim uvjetima, koja je vjerojatnost da se u 5 slučajeva ta kolonija ne pojavi manje od 4 puta.

$$\left[X \sim B(5; 0,8), p(\{X \geq 4\}) = \binom{5}{4} 0,8^4 0,2^1 + \binom{5}{5} 0,8^5 0,2^0 = 73,7\%. \right]$$

9. Ako je težina odraslog muškarca normalna slučajna varijabla s očekivanjem 79kg i standardnom devijacijom 10kg, odredite

- a) vjerojatnost da je muškarac težak između 69 i 89 kg,
- b) postotak muškaraca lakših od 69 kg,
- c) postotak muškaraca težih od 100 kg.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } p(\{69 \leq X \leq 89\}) = p\left(\left\{\frac{69-79}{10} \leq \frac{X-79}{10} \leq \frac{89-79}{10}\right\}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 68\%, \\ \text{b) } 16\%, \text{ c) } p(\{X \geq 100\}) = 1 - p(\{X < 100\}) = 1 - p\left(\left\{\frac{X-79}{10} \leq \frac{100-79}{10}\right\}\right) = 1 - \\ \Phi(2,1) = 2,8\%. \end{array} \right]$$

10. Neka je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem μ i varijansom σ^2 . Odredite vjerojatnosti da X poprimi vrijednosti iz segmenta $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, odnosno $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

$$\left[\begin{array}{l} p(\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\}) = p\left(\left\{\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right\}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 68,3\%, \\ p(\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 95,4\%, \\ p(\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\}) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 99,7\%. \end{array} \right]$$