

Nizovi - pitanja iz teorije i zadatci

- Definirajte niz, ograničen niz i monoton niz. Navedite po jedan primjer niza koji je:
 - ograničen,
 - monoton,
 - ograničen i monoton,
 - ograničen i nije monoton,
 - monoton i nije ograničen,
 - nije ograničen i nije monoton.
- Kako se definiraju aritmetički i geometrijski niz. Koliko iznosi zbroj prvih n članova aritmetičkog, odnosno geometrijskog niza.
- Napišite prvih pet članova
 - aritmetičkog niza kojemu je $a_3 = 3$ i $d = 2$;
 - geometrijskog niza kojemu je $a_2 = 5$ i $q = \frac{1}{2}$.
- Definirajte gomilište niza i limes niza. U čemu se razlikuju ta dva pojma? Dajte primjer niza koji ima limes, te primjer niza koji ima gomilište i nema limes.
- Odredite gomilšte nizova $a_n = \cos(n\pi)$ i $b_n = \frac{1+(-1)^n}{3}$.
- Navedite svojstva konvergentnih nizova.
- Što znači da niz konvergira k ∞ , odnosno $-\infty$?
- Ispitajte monotonost i ograničenost nizova
 - $a_n = \frac{n}{n+1}$
 - $a_n = \frac{1}{2^n}$
 - $a_n = \frac{n+2}{n}$
 - $a_n = \frac{2^n+2}{3^n}$
- Odredite početni član a_1 aritmetičkog niza ako je $a_7 = 21$ i $S_7 = 105$.
- Odredite aritmetički niz takav da je $5a_1 + 10a_5 = 0$ i $S_4 = 14$.
- Odredite zbroj svih dvoznamenkastih brojeva.
- Odredi kvocijent geometrijskog niza kojem je prvi član 1, a zbroj trećeg i petog iznosi 90.
- Duljine bridova kvadra čine geometrijski niz. Volumen kvadra je 216 cm^3 , a prostorna dijagonala iznosi $\sqrt{364} \text{ cm}$. Odredite duljine bridova kvadra.

14. Metalno zrcalo apsorbira kod svakog odbijanja 10% svjetlosti. Kolika je jačina svjetlosti jedne svjetlosne zrake koja se 6 puta odbila, ako joj je jačina prije odbijanja bila J .
15. Zagrijano tijelo se hladi približno prema zakonu geometrijskog niza. Pretpostavimo da se svake minute temperatura tijela smanji za petinu prethodne. Ako je početna temperatura bila 100°C , kolika mu je temperatura poslije 10 minuta?
16. Pokažite da $x_n = \frac{3n-2}{2n+7} \rightarrow \frac{3}{2}$ kad $n \rightarrow \infty$ i odredite za koje sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x_n - \frac{3}{2}| < 0.001.$$

17. Odredite opći član a_n niza $0.9, 0.99, 0.999, \dots$, te odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Za koje sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|a_n - a| < 0.00001?$$

18. Odredite opći član a_n niza $0.3, 0.33, 0.333, \dots$, te odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

19. Odredite limese sljedećih nizova

(a) $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n+1}$	(b) $a_n = \frac{(3n-1)^2}{(2n+3)^2}$
(c) $a_n = \frac{3n^2 + 4n - 2}{5n^2 - 2n + 1}$	(d) $a_n = \frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{2n^3}$
(e) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$	(f) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
(g) $a_n = 5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{n-1}}$	(h) $a_n = \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$
(i) $a_n = \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$	(j) $a_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4 + n + 1}}$
(k) $a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}$	

20. Odredite limese sljedećih nizova

(a) $a_n = \frac{2^{(n+1)} - 2^{2n}}{3^{n+1}}$	(b) $a_n = \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$
(c) $a_n = \frac{3^n - 5^{n+1}}{3^n \cdot 5^n - 2^{n+1}}$	(d) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n-1}$
(e) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \dots + \frac{2^n}{5^n}}$	(f) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2-n+1}$

21. Zbroj prvih n članova niza je $s_n = \frac{1-3^n}{2 \cdot 3^n}$. Odredite opći član niza, te ispitajte njegovu konvergenciju.
22. Dokažite da je niz $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$ rastući i ograničen, te da vrijedi $0 \leq a_n \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a zatim odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
23. Dokažite da je niz $a_n = 2^{\frac{n}{n+1}}$ rastući, da vrijedi $0 \leq a_n \leq 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a zatim odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Preporučeni linkovi:

<http://web.math.hr/nastava/analiza/files/nizovi.pdf>

<http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node125.html>