


cad lab



**Oblikovanje pomoću računala**

**Krivulje i površine**

14.4.2008
1

---

---

---


---

---

---

---

---


cad lab

### Sadržaj

- O prostorima
- Koordinatni sustavi
- Krivulje (B-spline, Bezier, NURBS,...)
- Površine

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
2

---

---

---


---

---

---

---

---


cad lab

### O prostorima

- Euklidski prostor i euklidska geometrija dobila je ime po Grčkom matematičaru Euklidu koji je živio 300 BC. U svojoj knjizi "Elementi" naveo je niz aksioma, teorema i dokaza vezanih za opis kvadrata, kružnice, točke, linije, itd. Neki od postulata su:
  - pravac se može kreirati povezivanjem bilo koje dvije točke,
  - pravac se može produžiti u beskonačnost,
  - koristeći konačni pravac može se kreirati kružnica tako da se dužina koristi kao radijus a jedna krajnja točka kao centar,
  - svi pravi kutovi su sukladni,
  - ukoliko se kreiraju dva pravca koji presijecaju treći na takav način da je suma unutarnjih kutova manja od zbroja dva prava kuta, ta dva pravca se moraju presjeći ukoliko se dovoljno produle.
- Može se reći da je Euklid opisao geometriju svemira koju je Newton iskoristio za kreiranje zakona gravitacije i gibanja.
- Ne Euklidski opisi prostora (geometrije) su Riemannov prostor (eliptični prostor), Lobachevski prostor, hiperbolični prostor.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
3

---

---

---

---

---

---

---

---

# O prostorima

Hyperbolic

Euclidean

Elliptic

- primjer ne - Euklidske geometrije

- Riemannove površine

- hiperbolična geometrija

p1

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

4

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Koordinatni sustavi

- Koordinatni sustavi su sustavi u kojima se položaj (neke točke) određuje pomoću koordinata na specifičan način. Najjednostavniji koordinatni sustav - kartezijev (Renatus Cartesius) (pravokutni) sastoji se od koordinatnih osi koje su međusobno okomite, a položaj se određuje pomoću dvije koordinate x i y (2D) ili tri koordinate x, y, z (3D).

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

5

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Koordinatni sustavi – u odnosu na kartezijev

- Polarni koordinatni sustav: koordinate su udaljenost od ishodišta do mjerene točke (radius  $r$ ) i kut između pozitivne x-osi i linije od ishodišta do mjerene točke (azimut  $\theta$ ).

- Cilindrični koordinatni sustav: koordinate su udaljenost od ishodišta do mjerene točke (radius  $r$ ), kut između pozitivne x-osi i linije od ishodišta do mjerene točke (azimut  $\theta$ ) te udaljenost mjerene točke od xy ravnine (visina  $h$ ).

- Sferni koordinatni sustav: koordinate su udaljenost od ishodišta do mjerene točke (radius  $r$ ), kut između z-osi i linije od ishodišta do mjerene točke (zenit  $\phi$ ) te kut između pozitivne z-osi i linije od ishodišta do mjerene točke projicirane u xy ravninu (azimut  $\theta$ ).

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

6

---

---

---

---

---


---

---

---

---

---



## Transformacija koordinata

- transformacija kartezijevih koordinata u polarne
 
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$
- transformacija kartezijevih koordinata u **cilindrične**

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = h \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad h = z$$
- transformacija kartezijevih koordinata u **sferne**


$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \phi = \arccos \frac{z}{\rho} \quad \phi = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ dh \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$dV = dx dy dz = r dr d\theta dz$$



14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
7

---

---

---

---

---


---

---

---


---

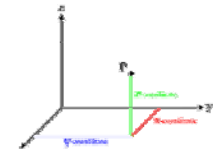
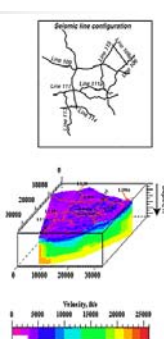
---



## Dimenzionalnost

- 2D geometrijski objekti opisuju se pomoću dvije koordinate.
- 2.5D geometrijski objekti opisuju se pomoću dvije koordinate i pomoću dodatnog atributa koji opisuje visinu za svaku točku. 2.5D Geometrijski objekti mogu se konvertirati u 2D objekte odbacivanjem visine.
- 3D geometrijski objekti opisuju se pomoću tri koordinate.



14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
8

---

---

---

---

---


---

---

---


---

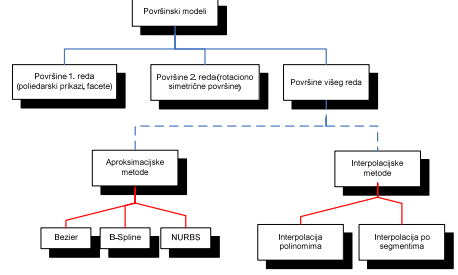
---



## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Najveće se razlike među komercijalnim sustavima uočavaju u vrstama krivulja i površina koje podržavaju, načinima njihova definiranja i mogućnostima manipulacije istima (tрезivanje, spajanje, modifikiranje itd.).
- Jedan od načina generiranja površinskog modela jest definiranjem površina na žičanom modelu.





14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
9

---

---

---

---

---

---

---

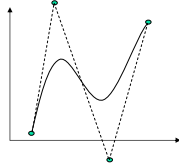
---

---

---

**cad lab**

- 

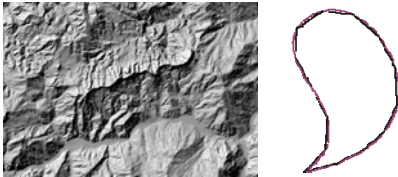


- p1    p2

10

## cad lab

- p1  
p2  
p3



11

## cad lab

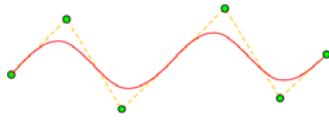
- 



12

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Veća razina podudarnosti odnosno bolja interpolacija uz manji broj pojedinačnih segmenata može se ostvariti uporabom krivulja višeg reda. Na taj način smanjuje se potrebna količina memorije i olakšava interaktivni rad pri modeliranju.
- Najčešće se koriste polinomi trećeg reda jer polinomi nižeg reda ne daju dovoljno fleksibilnosti za oblikovanje različitih krivulja, a polinomi višeg reda su računski zahtjevniji i složeniji za primjenu. Problem je u tome što se kroz zadane točke teoretski može provući bilo koji polinom  $n$ -tog reda, no takve krivulje su nestabilne odnosno prave oscilacije.

[illegible]

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Postoji više oblika matematičkog prikaza krivulja za aproksimacije višeg reda: eksplicitni, implicitni i parametarski.
  - U slučaju primjene eksplicitnog oblika koordinate  $y$  i  $z$  izražene su kao eksplisitne funkcije koordinate  $x$  ( $y=f(x)$  u 2D i  $z=g(x)$  u 3D). Nedostaci ovog oblika u primjenama računarske grafike su sljedeći:
    - nisu moguće višestruke vrijednosti  $x$  (kao npr. kod kružnica  $y = \pm (r^2 - x^2)^{1/2}$ ),
    - nije sačuvana rotacijska invarijantnost (nije jednostavno rotirati krivulju),
    - teškoće s vertikalnim tangentama (zbog beskonačnog iznosa nagiba).
  - U slučaju primjene implicitnog oblika jednadžba krivulje ima oblik  $f(x,y,z)=0$ . Nedostaci implicitnog oblika u primjenama računarske grafike su sljedeći:
    - problem s višestrukim rješenjima (potrebno je postavljati dodatne uvjete za izbor željenog rješenja),
    - problem s kontinuitetom tangenti u dodirnim točkama različitih segmenata (podudarnost smjera).
- Linija:  $ax + by + c = 0$   
 Kružnica:  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- U slučaju primjene parametskog oblika jednadžbe krivulje sve tri koordinate izražene su kao funkcije parametra u:  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ .
- Parametarski oblik jednadžbe krivulje nema prethodne navedene nedostatke eksplicitnog i implicitnog oblika te je stoga najprikladniji za modeliranje krivulja u računarskoj grafici.
- Parametarske krivulje trećeg reda najčešće se koriste za modeliranje krivulja u računarskoj grafici jer omogućavaju dovoljnu fleksibilnost za oblikovanje različitih krivulja uz prihvatljivu razinu složenosti.
- Model krivulje se specifiira po odsječcima polinomima trećeg reda. Svaki odsječak Q opisane je tri funkcije  $x$ ,  $y$  i  $z$  parametara u na sljedeći način:  $Q(u) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$  gdje je:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \\&\text{uz } 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Ako definiramo vektor potencija parametra  $t$  na sljedeći način:  
 $T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$
- te matricu koeficijenata triju polinoma na sljedeći način

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

- tada možemo pisati izraz za model odsjeka krivulje u sažetom obliku  $Q(t) = T \cdot C$ .
- deriviranjem prethodnog izraza dobit će se izraz za vektor smjera tangente

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0]C$$

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
16

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Cjeloviti model željene krivulje tvori se sastavljanjem modela pojedinih odsječaka.
- Razina glatkoće krivulje na spoju dvaju odsječaka izražava se u smislu dviju vrsta kontinuiteta:
  - geometrijskog kontinuiteta  $G$ ,
  - parametarskog kontinuiteta  $C$ .

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
17

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

- Geometrijski kontinuitet definiran je na sljedeći način:
  - geometrijski kontinuitet  $G^0$  - neprekinutost krivulje u točki dodira odsječaka,
  - geometrijski kontinuitet  $G^1$  - jednakost vektora smjera tangente u točki dodira odsječaka.
  - geometrijski kontinuitet  $G^2$  - jednakost središta zakrivljenosti.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
18

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

cad lab

- Parametarski kontinuitet definiran je na sljedeći način:
  - parametarski kontinuitet  $C^0$  - jednakost parametara u u točki dodira odsječaka,
  - parametarski kontinuitet  $C^n$  - jednakost n-te derivacije  $Q(u)$  u točki dodira odsječaka.

Spojna točka

$C^0$

oskulatorna kružnica

$C^2$

$C^1$

kontinuitet radijusa zakrivljenosti

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
19

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

cad lab

- Odnos parametarskog i geometrijskog kontinuiteta može se sažeti na sljedeći način:  
 $C^1 \Rightarrow G^1$   
 tj. parametarski kontinuitet implicira geometrijski kontinuitet, dok obrat općenito ne vrijedi.

dva spojena segmenta, zadovoljen  $G^1$  kontinuitet

smjerovi tangenti dvaju segmenata su jednaki (ne nužno i veličina), zadovoljen  $G^1$  kontinuitet

zadovoljenje kontinuiteta drugog reda, jednakost zakrivljenosti segmenata u okolini spojne točke, zadovoljen je  $C^2$  kontinuitet

ukoliko su i smjer i veličine vektora jednake tada je zadovoljen  $C^1$  kontinuitet

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
20

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD/CAM sustavima

cad lab

- Polinom trećeg stupnja kao model odsjeka krivulje ima 4 nepoznata koeficijenta što zahtijeva 4 uvjeta za njihovo određivanje. (Na taj način dobiva se sustav od ukupno 4 jednačbe s 4 nepoznane. Uvjeti mogu biti: krajnje točke, vektor smjera tangente ili kontinuitet u točkama dodira pojedinih odsječaka.)
- S obzirom na izbor vrste uvjeta definirane su različite vrste krivulja. Osnovne vrste krivulja su:
  - Kubične krivulje,
  - Hermiteove krivulje,
  - Bezierove krivulje,
  - B-spline krivulje,
  - NURBS krivulje.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
21

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Kubične

- Kubična krivulja je najjednostavnija krivulja. Zada je se pomoću  $n$  točaka koje čine  $n-1$  intervala. Za svaki interval se definira kubični polinom tj. polinom trećeg stupnja.
- Polinom trećeg stupnja je dvostruko derivabilan odnosno prva i druga derivacija su kontinuirane. Zbog toga se polinomi definirani nad susjednim intervalima mogu spajati u krivulju, a da pritom krivulja na granici intervala bude glatka.
- Da bi se ispunio uvjet glatkoće krivulje susjedni intervali trebaju završavati u istoj točki (čvoru) i moraju im se poklapati prva i druga derivacija u zajedničkoj točki.
- Karakteristično za kubičnu krivulju jest da je krivulja glatka zbog kontinuiranih prvih dviju derivacija.

P1

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

22

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Hermitove

- Za razliku od kubične krivulje, Hermitove krivulje definiraju četiri podatka: početna i krajnja točka intervala te vektori tangente (pravac i veličina vektora) u tim točkama. Da bi spoj između dva susjedna intervala bio gladak vektori tangente u tom čvoru moraju imati jednaki pravac.

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

23

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Hermitove

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

24

---

---

---

---

---

---

---

---



## Krivulje u CAD: Bézierove

- Razvijene su početkom 70-tih godina. Pierre Bézier, razvio je ovu metodu opisa krivulja za potrebe tvrtke Renault. Bézierova krivulja je graf parametarski zadanog polinoma.
- Za razliku od prijašnjih krivulja ove krivulje prolaze kroz početnu i zadnju točku (interpoliraju ih) dok su ostale točke kontrolne, tj. krivulja ne prolazi kroz njih (aproksimira ih).
- Bézierove krivulje zadane su nizom točaka, od kojih dvije predstavljaju početnu i krajnju točku intervala i dio su krivulje dok su ostale kontrolne točke.
  - Oblik jednadžbe odsjeka Bézierove krivulje:
 
$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$

- Polinomi koji predstavljaju koeficijente pojedinih točaka u ovom izrazu nazivaju se Bernsteinovi polinomi.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
25

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Bézierove

- Bernsteinov polinom određuje utjecaj pojedine točke na oblik krivulje. Na primjer, prva točka ima najveći utjecaj na krivulju u njenoj neposrednoj blizini. Utjecaj te točke je sve manji što se više krivulja bliži kraju. Isto tako, što je više kontrolnih točaka koje definiraju krivulju to je utjecaj pojedine točke na izgled krivulje sve manji.
- Izuzetak su prva i zadnja kontrolna točka čiji utjecaj na dijelove krivulje u njihovoj blizini raste povećanjem broja kontrolnih točaka.

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
26

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Bézierove

- Osobine Bézierovih krivulja :
  - Oblik krivulje aproksimira oblik kontrolnog poligona kojeg zatvaraju zadane točke. Krivulja prolazi kroz krajnje točke i tangentna je na prvu i zadnju stranicu poligona.
  - Micanjem jedne kontrolne točke mijenja se izgled cijele krivulje (elastično ponašanje) što je pogodno za interaktivnu manipulaciju krivuljom.
  - Bézierova krivulja može se formirati bez rješavanja sustava linearnih jednadžbi.
  - Krivulja je uvijek upisana u svoj kontrolni poligon što dodatno olakšava proračun u slučaju eventualnog presijecanja dviju krivulja kada se jednostavno provjerava da li se preklapaju kontrolni poligoni tih krivulja.
  - Mogućnost formiranja oštih zgibova tako da se tri točke za redom definiraju identično.

p1

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
27

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Bézierove

- Nedostatak Bézierove krivulje :
  - zadaju se kontrolne točke koje ne pokazuju direktnu vezu s oblikom krivulje,
  - interpolacijske točke ne mogu se direktno zadavati,
  - stožasti oblici posebice kružnice se ne mogu egzaktno prikazati.

p1

p2

p3

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

28

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: Bézierove

- Stupanj krivulje je za jedan manji od broja točaka kontrolnog poligona.
- Krivulja uvijek prolazi kroz krajnje točke i uvijek je tangenta na liniju koja spaja prve dvije i zadnje dvije kontrolne točke. Navedeno omogućava slaganje više krivulja zadržavajući kontinuitet.
- Zadavanjem početne i krajnje točke na istim koordinatama kreiraju se zatvorene krivulje. Ukoliko se poklapaju tangente u prvoj i krajnjoj točki tada je ostvaren kontinuitet G<sup>1</sup>.

- Krivulja uvijek leži unutar konveksnog okvira određenog kontrolnim točkama te stoga ne oscilira skokovito.

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

29

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: B-spline

- B-spline (Basic spline) je zajednički naziv za grupu kontinuiranih, parametarski zadanih polinoma koji su zadani po segmentima.
- Drugim riječima B-spline se sastoji od segmenata čiji polinomni koeficijenti ovise o samo nekoliko obližnjih kontrolnih točaka.

$$F(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) b_j \quad \text{za } v \in [0,1]$$

← Bezier
← B-Spline

$$F(x) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(x) d_i$$

- gdje je  $N_{i,k}$  - normalizirana B-spline funkcija reda  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n+1$ .

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

30

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: B-spline

- B-spline reda  $m$  aproksimira  $m + 1$  kontrolnu točku krivuljom koja se sastoji od  $m - 2$  segmenata. Za svaki segment postoji jedna spojna točka ili čvor što znači da na čitavoj krivulji ima  $m - 1$  čvorova.

- Primjer "lokalnog" ponašanja B-spline.

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

31

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: B-spline

- B-spline prvog reda

- B-spline drugog reda

- B-spline trećeg reda

- B-spline četvrtog reda

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

32

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: B-spline

- Uniformnost kod B-spline znači da su čvorovi postavljeni na jednakim intervalima parametra  $t$ , a normalizirana funkcija je ista za svaki interval.
- Neracionalnost znači da se funkcije  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  ne mogu prikazati kao omjer dva kubna polinoma.

- Racionalna B-Spline krivulja je slična neracionalnoj B-Spline krivulji uz iznimku da se težinska funkcija dodaje za svaku kontrolnu točku. Vrijednost težinske funkcije može varirati između 0.0 i 1.0 i određuje u kojoj mjeri pojedina točka utiče na izgled krivulje. Neracionalna B-Spline krivulja postaje racionalna uz postavljanje vrijednosti težinske funkcije 1.0 ( $W(t)$ ).

$$Q(t) = [X(t) \ Y(t) \ Z(t) \ W(t)]$$

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

33

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: B-spline

- Osobine B-spline krivulja:
  - oblik svakog dijela krivulje određen je s  $k$  sukcesivnih čvorova, odnosno, jedan čvor ne utječe na više od  $k$  intervala, što omogućava lokalnu deformabilnost,
  - svaki interval krivulje B-spline reda  $k$  leži unutar konveksnog poligona njegovih pridruženih čvorova,
  - diskontinuitet u čvorovima, kao što su lomovi ili skok krivulje postižu se korištenjem višestrukih unutarnjih čvorova. Čvor višestrukosti  $p$  reducira derivabilnost krivulje u tom čvoru, bez čvorova B-spline krivulja prelazi u Bezier-ovu krivulju.

p1

p2

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

34

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: NURBS

- NURBS (Nonuniform Rational B-spline) krivulje se razlikuju od B-spline po tome što su neuniformne i racionalne. Neuniformnost znači da razmak između dva čvora na krivulji ne mora biti uniforman tj. jednak. Time su ostvarene određene prednosti spram B-spline.
- Kontinuitet NURBS krivulje može se zbog neuniformnosti intervala svesti s  $C^2$  na  $C^1$  te na  $C^0$  prema potrebi. Pritom je kontinuitet  $n$ -tog reda  $C^n$  definiran kao kontinuiranost krivulje i njenih  $n$  derivacija u danoj točki.
- Ako je kontinuitet sveden na  $C^0$  to znači da krivulja interpolira danu točku.

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) w_i}$$

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

35

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: NURBS

- Za NURBS krivulje je karakteristična mogućnost definiranja višestrukih spojnih čvorova

Krivulja s jednostrukim čvorovima sa redoslijedom. Svi segmenti krivulje su povezani  $C^2$  kontinuitetom, tj. na spoju je neprekinuta krivulja sa svoje prve dvije derivacije

Definiran je jedan dvostruki čvor. Time je segment  $Q_3$  reduciran u točku. Kontrolni poligoni imaju zajednički rub  $P_2P_3$ , pa točka mora ležati na njemu. Prijelaz je  $C^1$  kontinuiran.

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

36

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: NURBS

Zadan je trostruki čvor tako da su segmenti  $Q_1$  i  $Q_2$  svedeni na točku. Kontrolni poligoni se sijeku u točki  $P_2$  pa je čvor nužno tamo lociran. Krivulja prolazi tom točkom sa  $C^0$  kontinuitetom

Zadan je četverostruki čvor koji uzrokuje diskontinuitet krivulje budući da kontrolni poligoni nemaju zajednički presjek.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
37

---

---

---

---

---

---

---

---

## Krivulje u CAD: NURBS

■ Osobine NURBS krivulja:

- nudi jedinstvenu matematičku osnovu za standardne analitičke oblike kao i za slobodne oblike,
- fleksibilna je kod projektiranja vrlo raznovidnih oblika,
- može se razumno brzo izračunati numerički stabilnim i točnim algoritmima,
- ne mijenja se uslijed affine kao i uslijed transformacije pri kreiranju perspektivnog pogleda,
- predstavlja poopćenje ne-racionalnog B-spline i ne-racionalne i racionalne Bezierove krivulje.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
38

---

---

---

---

---

---

---

---

## Površine u CAD/CAM sustavima

■ Ravnske plohe su najčešće i najjednostavnije. Složenije površine konstruiraju se projekcijom skupa krivulja po pravcu (Tabulated cylinder) ili njihovom rotacijom oko osi (Surface of revolution).

■ Složenije površine oblikuju s linearnom interpolacijom između dvije krivulje (Ruled surface) ili gibanjem jedne krivulje po drugoj (Sweep surface).

■ Oblikovane površine generiraju se mrežom krivulja (Sculptured surface). Krivulje su kubične i prostorne neanalitičke krivulje (spline krivulje i NURBS krivulje). Takve površine prikazane su mrežom segmenata - prostornih ploha - omeđenih krivuljama. Kvalitetniji sustavi imaju mogućnost kreiranja spojnih površina između dviju prostorno bliskih površina (Fillet surface), s određivanjem uvjeta tangencijalnosti i zakrivljenosti.

14.4.2008
Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala
39

---

---

---

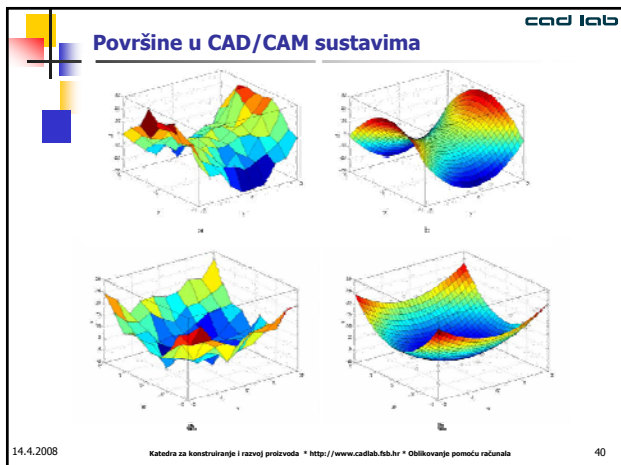
---

---

---

---

---




---

---

---

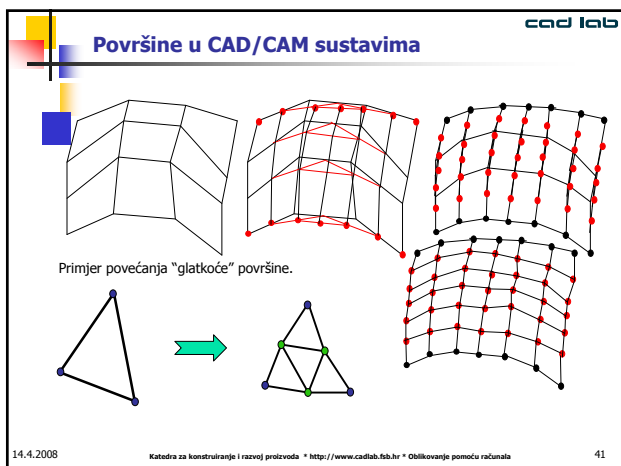
---

---

---

---

---




---

---

---

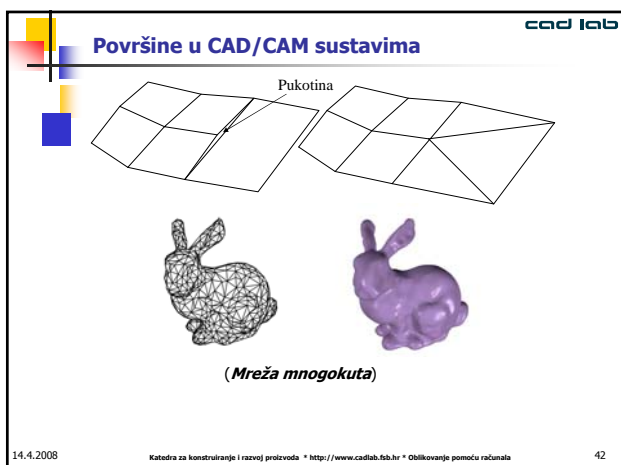
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

Površine u CAD/CAM sustavima

cad lab

3D

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

43

---

---

---

---

---

---

---

---

Površine u CAD/CAM sustavima

cad lab

$$\mathbf{x}(s,t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) B_j^m(t)$$

(Bézier površina)

(B-spline površina)

Kontrolna točka

Kontrolni poligon

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

44

---

---

---

---

---

---

---

---

Površine u CAD/CAM sustavima

cad lab

(Tabulated cylinder)

(Surface of revolution)

(Ruled surface)

a

b

c

(Sweep surface)

(Sculptured surface)

(Filleted surface)

d

e

f

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

45

---

---

---

---

---

---

---

---

Površine u CAD/CAM sustavima

cad lab

(Loft surface)

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

46

---

---

---

---

---

---

---

---

Površine u CAD/CAM sustavima

cad lab

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

47

---

---

---

---

---

---

---

---

Example

cad lab

14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

48

---

---

---

---

---

---

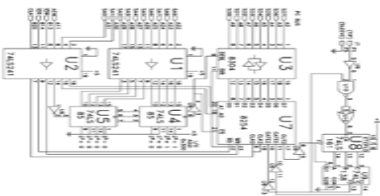
---

---



Literatura i URL linkovi

- <http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/classes/bezier.html>
- <http://www.cs.brown.edu/>
- <http://133www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html>
- <http://www.dtf.bwp.bluewin.ch/evgeny/intro/inter.htm>
- <http://www.fsb.hr/geometrija/broda/>
- <http://www.wikipedia.com>
- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- J. D. Foley, Computer Graphics, Addison Wesley, New York, 1995.
- A. Watt, 3D Computer Graphics, Addison Wesley, New York, 2000.



14.4.2008

Katedra za konstruiranje i razvoj proizvoda \* <http://www.cadlab.fsb.hr> \* Oblikovanje pomoću računala

49

---

---

---

---

---

---

---

---

17