zadnja izmjena 06. 10. 2022
.

Matematika (studij Biologija)

skripta za vježbe

natipkali i uredili:
Mario Stipčić
Daniela Ivanković

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU 1876 PMF 1946 PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET

Sadržaj

Poglavlje 1

Linearna algebra

1.1. Matrice

1.1.1. Terminologija

Definicija 1.1. **Matrica** tipa $m \times n$ je pravokutna tablica brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kažemo da je i-ti redak matrice A niz brojeva

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in},$$

a j-ti stupac matrice A niz brojeva

$$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}.$$

Element matrice A je a_{ij}, gdje i označuje broj retka, a j broj stupca. Matricu A možemo kraće zapisati kao $A = [a_{ij}]$.

Često ćemo promatrati matrice koje imaju jednaki broj redaka i stupaca, a to je slučaj kada je $m = n$. Takve matrice zovu se **kvadratne matrice** reda n. Za njih ćemo govoriti o dijagonali kao o nizu brojeva

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}.$$

Za matricu A gornjeg oblika i tipa $m \times n$ definiramo **transponiranu** matricu, u oznaci A^τ, kao matricu tipa $n \times m$ i oblika

$$A^\tau = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da su redci matrice A kod transponirane matrice A^τ postali stupci matrice i obratno, stupci matrice A su sada redci transponirane matrice A^τ.

Posebni tipovi matrica:

- *nul-matrica* tipa $m \times n$: $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$,

- *jedinična matrica* reda n (kvadratna): $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$,

- *dijagonalna matrica* reda n: matrica oblika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

- *trokutasta matrica* reda n: matrica oblika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *(gornjetrokutasta)* ili oblika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *(donjetrokutasta)*,

- *simetrična matrica*: matrica A za koju vrijedi $A = A^\tau$; matrica oblika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

- *antisimetrična matrica*: matrica A za koju vrijedi $A = -A^\tau$; matrica oblika $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$,
  (primijetimo da simetrične i antisimetrične matrice moraju biti kvadratne).

Primjer 1.2.
- Matrica $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ nije niti simetrična niti antisimetrična. Naime, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^\tau = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

- Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ je simetrična; svejedno je što ima na dijagonali, dok ostali brojevi moraju biti zrcalni po dijagonali.

- Matrica $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ je antisimetrična; na dijagonali ima nule, a brojevi na simetričnim mjestima u odnosu na dijagonalu su suprotni brojevi.

- Matrica $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ je dijagonalna matrica, a također je i gornjetrokutasta i donjetrokutasta. Simetrična je, no nije antisimetrična.

$\square$

Za matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ standardno definiramo **zbrajanje matrica** kao novu matricu oblika

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] .$$

Iz definicije je jasno da zbrajati možemo samo matrice istog tipa. Dakle, ako su matrice A i B tipa $m \times n$, tada je i matrica $A + B$ tipa $m \times n$. Definicija **množenja matrica** je nešto zahtjevnija:

$$A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right] = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}] .$$

Prema tome, element matrice $A \cdot B$ u i-tom retku i j-tom stupcu dobivamo tako da se „šećemo” po retku i matrice A i stupcu j matrice B, množimo te brojeve i zatim produkte zbrajamo. Vizualno bismo to ovako predočili:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} .$$

Ovo množenje ima smisla jedino kada su matrice A i B **ulančane**, odnosno kada A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka. U tom slučaju produkt $A \cdot B$ je matrica koja ima jednako redaka kao matrica A i jednako stupaca kao matrica B. Dakle, ako je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B tipa $n \times k$, tada je dobro definiran njihov produkt $A \cdot B$ i on je tipa $m \times k$.

Napomena: Nije isto reći da su A i B ulančane matrice te da su B i A ulančane matrice! Primjerice, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tada su A i B ulančane matrice, ali B i A nisu ulančane matrice!

Ono što ipak vrijedi ako su A i B ulančane matrice, kao i B i A, jest: ako je A matrica reda $m \times n$, onda je B matrica reda $n \times m$; dakle, „obrnutog reda”.

Ovaj koncept možda malo zbunjuje, no bitno je iz ovoga upamtiti da jedan produkt može postojati, a drugi ne (ili obratno)!

Još jedna korisna operacija je **množenje matrice skalarom**. Umnožak matrice A i broja λ je matrica kojoj svaki element pomnožimo sa λ; preciznije,

$$\lambda \cdot A = [\lambda a_{ij}] .$$

Zadatak 1.1. Za matrice u zadatku odredite postoji li zbroj $A + B$ te produkti $A \cdot B$ i $B \cdot A$. Ako postoje, odredite ih.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\tau$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

(b) $A = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^\tau$, $B = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje. (a) Primijetimo, $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ je matrica reda 1×2, dok je B matrica reda 2×1. Budući da nisu istog reda, ne možemo zbrajati te matrice pa $A + B$ ne postoji. No, postoje i $A \cdot B$ i $B \cdot A$ jer su matrice ulančane u oba poretka:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ je reda 1×3 te matica B je također reda 1×3. Stoga možemo zbrajati te matrice:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

No, ne postoje produkti $A \cdot B$ i $B \cdot A$ jer ni u kojem poretku matrice nisu ulančane.

(c) Matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ su reda 2×2 pa se mogu i zbrajati i množiti u oba poretka:

$$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Množenje matrica može se jednostavno izvesti i pratiti sljedećom ilustrativnom metodom. Odredit ćemo vrijednost produkta $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Postavimo početnu mrežu na sljedeći način:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & -3 \\ \hline -3 & 1 & & \\ 4 & 1 & & \end{array}.$$

Prazni prostor u donje desnom dijelu ove mreže popunit ćemo umnoškom tih dviju matrica na sljedeći način. Pogledat ćemo gdje se sijeku svaki pojedini redak iz donje lijevog dijela mreže sa stupcem iz gornje desnog dijela mreže. Na tom mjestu upisat ćemo rezultat koji dobivamo množenjem matrica: zbroj produkata parova brojeva. Primjerice, za redak s brojevima -3 i 1 te stupac s brojevima 2 i 0 računamo $-3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -6$ i to upisujemo „na križanju" tog retka i stupca.

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & -3 \\ \hline -3 & 1 & -6 & \\ 4 & 1 & & \end{array}.$$

Nastavimo li tako i s preostala tri polja u tom dijelu mreže, dobivamo

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & 0 \\ & & 0 & -3 \\ \hline -3 & 1 & -6 & -3 \\ 4 & 1 & 8 & -3 \end{array}.$$

Iz tog dijela mreže iščitavamo i konačno rješenje: $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$.

U ovom postupku važno je napomenuti kako „lijeva” matrica iz produkta obavezno ide u donje lijevi dio mreže, a „desna” u gornje desni; kao što ćemo vidjeti kasnije, promjenom poretka u množenju dobivamo različite rezultate! Dodatno, ovaj postupak je koristan i ako želimo pomnožiti više matrica odjednom! Primjerice, trebamo li odrediti $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, mreža bi izgledala ovako:

$$\begin{array}{ccc|c|cc} & & & 1 & & \\ & & & 5 & & \\ & & & 2 & 1 & 2 \\ \hline -3 & 1 & 2 & & & \\ 0 & -2 & 5 & & & \end{array}.$$

Prazne dijelove mreže u donjem retku popunjavamo slijeva nadesno, a konačno rješenje nalazi se u krajnjem, donje desnom dijelu mreže. Popunjena mreža bi trebala biti oblika

$$\begin{array}{ccc|c|cc} & & & 1 & & \\ & & & 5 & & \\ & & & 2 & 1 & 2 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

a konačno rješenje $\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ovako možemo zapisati proizvoljne produkte matrica (sve dok su oni ispravno definirani), pa i višestruko množenje matrice same sa sobom - sve dok se držimo poretka.

Matrice zadovoljavaju mnoga zanimljiva svojstva koja zapravo vrijede i za skup realnih brojeva. Strukture koje zadovoljavaju ova svojstva nazivamo algebrama.

1. *asocijativnost zbrajanja*: $(A + B) + C = A + (B + C)$,

2. *komutativnost zbrajanja*: $A + B = B + A$,

3. $A + O = O + A = A$,

4. $A \cdot I = I \cdot A = A$,

5. *asocijativnost množenja*: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

6. *lijeva distributivnost množenja prema zbrajanju*: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

7. *desna distributivnost množenja prema zbrajanju*: $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

Međutim, komutativnost množenja matrica ne vrijedi, odnosno ne mora uvijek vrijediti $A\cdot B = B\cdot A$, čak i ako su matrice ulančane u oba poretka, odnosno ako oba umnoška postoje. Primjerice, za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},$$

a to su različite matrice.

Zadatak 1.2. Odredite broj $x \in \mathbb{R}$ takav da matrice A i B komutiraju ako su one oblika

$$A = \begin{bmatrix} x & x \\ x-1 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6x & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Da bi matrice A i B komutirale, trebalo bi vrijediti $A\cdot B = B\cdot A$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{bmatrix} x & x \\ x-1 & x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+6x^2 & -x+x \\ x-1+6x^2 & -x+1+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x^2+x & 0 \\ 6x^2+x-1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B\cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6x & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & x \\ x-1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x+1 & x-x \\ 6x^2+x-1 & 6x^2+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6x^2+x-1 & 6x^2+x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zaključujemo, mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} 6x^2+x & 0 \\ 6x^2+x-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6x^2+x-1 & 6x^2+x \end{bmatrix},$$

odnosno vrijedi niz jednakosti po elementima:

$$\begin{aligned} 6x^2+x &= 1, & 0 &= 0, \\ 6x^2+x-1 &= 6x^2+x-1, & 1 &= 6x^2+x. \end{aligned}$$

Primjećujemo, druga i treća jednakost uvijek vrijede; to nam odgovara i takve jednadžbe ne moramo promatrati (da smo dobili neku jednakost koja nikako ne vrijedi, onda bismo prestali s rješavanjem zadatka i zaključili da cjelokupni zadatak nema rješenja). Prva i četvrta jednakost su identične i moramo ju raspisati. Rješavamo jednadžbu

$$6x^2+x = 1 \Longleftrightarrow 6x^2+x-1 = 0.$$

Rješenja dobivamo po klasičnoj formuli za rješenja kvadratne jednadžbe; u formulu $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ uvrštavamo $a=6$, $b=1$, $c=-1$ i dobivamo rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

□

Zadatak 1.3. Odredite sve matrice koje komutiraju s matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Neka je B matrica koja komutira s matricom A. Na prvu, ne znamo kojeg je reda ova matrica; no, znamo da postoje produkti $A \cdot B$ i $B \cdot A$; pa po definiciji ulančanosti matrica, matrica B ima jednak broj stupaca kao A redaka te jednak broj redaka kao A stupaca. Zaključujemo, B je reda 2×2, odnosno oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Provjerimo onda kada je $A \cdot B = B \cdot A$:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A, \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{11} + b_{12} \\ b_{21} & -b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Time dobivamo 4 jednadžbe:

$$\begin{aligned} b_{11} - b_{21} &= b_{11}, & b_{12} - b_{22} &= -b_{11} + b_{12}, \\ b_{21} &= b_{21}, & b_{22} &= -b_{21} + b_{22}. \end{aligned}$$

Idemo redom.

- Iz gornje lijeve jednadžbe dobivamo $b_{21} = 0$.
- Iz gornje desne jednadžbe dobivamo $b_{11} = b_{22}$.
- Donja lijeva jednadžba uvijek vrijedi!
- Iz donje desne jednadžbe dobivamo $b_{21} = 0$. (To smo, doduše, već dobili; no da smo za b_{21} dobili nešto različito od nule koju smo dobili u gornje lijevoj jednadžbi, zadatak ne bi imao rješenja!)

Iz svega ovoga možemo zaključiti da su sve matrice koje komutiraju s A oblika

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}.$$

Primjećujemo, u pitanju su gornje trokutaste matrice s jednakim elementima na dijagonali.

□

Definirali smo množenje dviju matrica, no za kvadratne matrice može se definirati i **potenciranje matrica**.

Neka je A kvadratna matrica. Tada definiramo

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A, \\ A^3 &= (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A, \end{aligned}$$

ili, za bilo koji broj $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ puta}} = A^{n-1} \cdot A.$$

Također uvodimo oznaku i $A^1 = A$ te $A^0 = I$ (jedinična matrica). Ponekad je praktično zapisati neki izraz s matricom pomoću polinoma. Preciznije, za polinom oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

definiramo

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Dakle, standardno mijenjajući x za A umjesto nekog broja (dobivenog uvrštavanjem broja x) dobivamo neku novu matricu (uvrštavanjem matrice A). Uočite da umjesto a_0 sada piše $a_0 I$; osim što na tom mjestu mora pisati matrica, a ne samo broj (kako bi bilo dobro definirano zbrajanje), to odgovara našoj intuiciji upravo zbog $A^0 = I$.

Zadatak 1.4. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ te neka je $p(x) = 5x^3+2x^2-4x+3$. Odredite vrijednost $p(A)$.

Rješenje. Odredimo sve potrebne potencije matrice A.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix},$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} p(A) &= 5A^3 + 2A^2 - 4A + 3I \\ &= 5\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -20 & 5 \\ -15 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -23 & 5 \\ -15 & -33 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.5. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ odredite vrijednost izraza $A^2 + AB - 2B$.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} A^2 + AB - 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

1.2. Sustavi linearnih algebarskih jednadžbi

Primjer 1.3. Riješimo sljedeća tri sustava jednadžbi na način kojeg smo učili rješavati u školi:

- Riješimo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5, \\ -x + y &= 2. \end{aligned}$$

  Zbrajanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$4y = 7 \Longrightarrow y = \frac{7}{4}.$$

  Uvrštavanjem dobivenog y–a u, recimo, drugu jednadžbu, dobivamo

$$-x + \frac{7}{4} = 2 \Longrightarrow -x = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

  Dakle, početni sustav ima jedinstveno rješenje:

$$x = -\frac{1}{4}, y = \frac{7}{4}$$

  koje možemo zapisati i vektorski:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

- Dan je sustav

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5, \\ 2x + 6y &= 10. \end{aligned}$$

  Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2, primjećujemo da dobivamo upravo drugu jednadžbu. Najviše što možemo zaključiti iz ove situacije jest (iz prve jednadžbe)

$$x = 5 - 3y,$$

  dok je y zapravo bilo koji realni broj. To znači da ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja možemo zapisati parametarski:

$$\begin{aligned} x &= 5 - 3t, \\ y &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Vektorski, rješenje možemo zapisati slično kao u prethodnom primjeru ili možemo razdvojiti dio vektora na koji utječe parametar t:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

- Promotrimo sustav oblika

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5, \\ 3x + 9y &= 1. \end{aligned}$$

  Pomnožimo li prvu jednadžbu s 3, dobit ćemo

$$3x + 9y = 15.$$

  No, to se direktno kosi s drugom jednadžbom

$$3x + 9y = 1$$

  jer izraz na lijevom strani ne može istovremeno biti i 15 i 1. Takav sustav nema rješenja; kažemo da je skup rješenja prazan skup ili označimo sa $\emptyset$.

$\square$

Ovaj primjer demonstrirao nam je tri moguća ishoda za rješenja nekog sustava: sustav može imati jedinstveno rješenje, može imati beskonačno mnogo rješenja (zapisana pomoću jednog ili više parametara) ili uopće ne mora imati rješenja.

Ovi sustavi imaju po dvije jednadžbe i po dvije nepoznanice, što nam sugerira da broj jednadžbi ili nepoznanica ništa ne govori o broju rješenja sustava (jedinstveno, beskonačno mnogo ili ne postoji).

Ove sustave je bilo jednostavno rješavati; što kada imaju znatno veći broj jednadžbi ili nepoznanica i kada ta dva broja nisu jednaka? Tada će nam dobro doći prikaz sustava pomoću matrica i tehnika kojom ćemo te matrice (pa tako i sustav) dovesti u jednostavniji oblik. Preciznije, neka je dan općeniti sustav s m jednadžbi i n nepoznanica:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Primijetimo da je ovaj sustav ekvivalentan jednakosti vektorskih matrica koje zapišemo ovako:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ako malo bolje promotrimo vektorsku matricu s lijeve strane, njene komponente nas podsjećaju na sumu iz definicije produkta dviju matrica. I zaista, ovo možemo preformulirati kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Označimo li redom

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ovaj sustav se može kraće zapisati i u obliku

$$Ax = b.$$

Matricu A zovemo matrica koeficijenata sustava, x je matrica (vektor) nepoznanica, a b matrica (vektor) slobodnih koeficijenata. Prilikom rješavanja sustava jednadžbi glavnu ulogu igrat će nam takozvana *proširena matrica sustava* koja je oblika

$$\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Primijetimo da se sustav jednadžbi ne mijenja ako napravimo bilo što od sljedećeg:

- ako zamijenimo redoslijed dviju jednadžbi,
- ako neku jednadžbu pomnožimo brojem različitim od 0,
- ako neku jednadžbu pomnožimo bilo kojim brojem i pribrojimo to drugoj jednadžbi.

Ove promjene se mogu na sličan način opisati i pomoću operacija nad matricama.

Definicija 1.4. Elementarne transformacije nad redcima matrice su sljedeća tri tipa operacija nad matricama (točnije, određenim redcima):

1. zamjena dvaju redaka u matrici,
2. množenje nekog retka realnim brojem različitim od 0,
3. množenje nekog retka bilo kojim realnim brojem i pribrajanjem tog produkta drugom retku.

Ono što je jako korisno jest što elementarnim transformacijama početni sustav, odnosno proširenu matricu, možemo transformirati u znatno povoljniji oblik iz kojeg možemo iščitati oblike rješenja tog sustava. Ovaj postupak zovemo **Gaussovom eliminacijom**.

Prilikom rješavanja nastojat ćemo da je dio matrice lijevo od iscrtkane linije što više nalik jediničnoj matrici. To neće uvijek biti moguće, kao niti postići da bude barem dijagonalna, no sigurno možemo postići da matrica bude gornjetrokutastog oblika; i taj oblik je dosta pogodan za traženje rješenja sustava.

Zadatak 1.6. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 8, \\ -3x & - & y & + & 2z & = & -11, \\ -2x & + & y & + & 2z & = & -3. \end{array}$$

Rješenje. Ovaj sustav zapisat ćemo pomoću matrice na sljedeći način: u svakom retku matrice zapisat ćemo koeficijente iz odgovarajuće jednadžbe. Svaki redak ima 4 broja (brojevi uz nepoznanice x, y i z te broj s desne strane jednakosti) pa će matrica biti reda 3×4. Dakle, promatramo matricu

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Cilj je ovu matricu transformirati tako da dio matrice lijevo od iscrtkane linije izgleda kao gornjetrokutasta matrica. Zapravo, ako taj dio matrice možemo shvatiti kao kvadratnu matricu (što ovisi o broju nepoznanica i broju jednadžbi), ciljat ćemo i na nešto više: da taj dio pretvorimo u jediničnu matricu (što neće uvijek biti moguće). Najefikasnije je to raditi stupac po stupac i to na sljedeći način. Prvo podijelimo prvi redak brojem 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Sada prvi redak pomnožimo brojem 3 i takav redak pribrojimo drugom retku. Dobivamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Slično, pomnožimo prvi redak brojem 2 i takav redak pribrojimo trećem retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Time smo u prvom stupcu postigli ono što gornjetrokutasta matrica treba zadovoljavati: ispod dijagonale (u ovom slučaju, ispod elementa na mjestu $(1,1)$) ima sve nule. Nastavljamo dalje s drugim stupcem; u ovom slučaju ključan nam je element drugog retka. Stoga drugi redak množimo s 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Ovaj redak množimo sa $-\frac{1}{2}$ i to pribrojimo prvom retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Opet, drugi redak množimo s -2 i pribrajamo trećem retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Preostaje nam još posljednji stupac. Treći red pomnožimo s -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Zatim, takav red pomnožimo s -1 i pribrojimo drugom retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Konačno, treći red jednostavno pribrojimo prvom retku (formalno, pomnožimo ga s 1 i pribrojimo prvom retku):

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Gotovi smo s transformacijama! Kada bismo ovu matricu iščitali kao sustav jednadžbi (po istom pravilu kao i na početku zadatka), dobili bismo sljedeći sustav (koji ima jednaka rješenja kao početni sustav, ali iz ovog oblika nam je jednostavno pročitati koja su to rješenja):

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 0\cdot y & + & 0\cdot z & = & 2, \\ 0\cdot x & + & y & + & 0\cdot z & = & 3, \\ 0\cdot x & + & 0\cdot y & + & z & = & -1. \end{array}$$

Odnosno, dobivamo rješenja danog sustava:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

□

Kako izgleda rješavanje sustava Gaussovom metodom kada imamo beskonačno mnogo rješenja ili kada uopće nemamo rješenja? Pogledajmo sljedeća dva zadatka.

Zadatak 1.7. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & -2, \\ -4x & - & 3y & - & 2z & = & 3, \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 0. \end{array}$$

Rješenje. Matrični zapis ovog sustava jest

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

Raspisujemo:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{5} \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Ovdje smo u nešto drugačijoj situaciji: nemamo jedinicu u trećem retku da bismo dovršili naš postupak. Ne postoji redak ispod toga koji bi imao u trećem stupcu (ili bilo kojem stupcu matrice A nakon trećeg) element različit od nule kako bi mogli zamijeniti retke i nastaviti s eliminacijama. Pogledajmo koji smo sada sustav jednadžbi dobili:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & & & - & z & = & 0, \\
 & & y & + & 2z & = & -1, \\
 & & & & 0 & = & 4.
\end{array}
$$

Treća jednadžba ne vrijedi, prema tome ovaj sustav nema rješenja. Po matricama ćemo to prepoznati na sljedeći način: postupak prestaje i jednadžba nema rješenja ako neki redak ima sve nule do iscrtkane linije i na kraju neki broj različit od nule. $\square$

Zadatak 1.8. Riješite sustav jednadžbi

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 2, \\
3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 2, \\
9x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5, \\
x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 1.
\end{array}
$$

Rješenje. Raspisujemo:

$$
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\
3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\
9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\
0 & -2 & 2 & 8 & -12 & -4 \\
0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\
0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\
0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\
0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\
0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \\
0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\
0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{rrrrr:r}
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].
$$

Tu moramo stati jer, nakon očišćenih stupaca, jedini preostali redak ima sve nule pa ne možemo napraviti „čišćenje” sljedećeg stupca. Da smo, recimo, imali još neki redak koji nema nule, napravili bi zamjenu redaka i nastavili s postupkom.

Redak s nulama nam ne škodi jer je to jednadžba oblika $0 = 0$. Dalje moramo rješavati sustav na stari način; no, dobili smo ga u nešto jednostavnijem obliku i ono što možemo zaključiti jest da su nepoznanice iz ovog „neočišćenog” dijela (nepoznanice x_4 i x_5) nepoznati parametri (kao i u ranijem primjeru kada smo stavili $y = t$). Rješavamo sustav

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0, \\ & x_2 & & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & -1, \\ & & x_3 & + & 6x_4 & - & 10x_5 & = & -3. \end{array}$$

Za „neočišćeni" dio uvodimo parametre $x_4 = \alpha$ i $x_5 = \beta$. Iz ovih jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha + 2\beta, \\ x_2 &= -1 - 2\alpha + 4\beta, \\ x_3 &= -3 - 6\alpha + 10\beta \\ x_4 &= \alpha, \\ x_5 &= \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Konačno rješenje je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha + 2\beta \\ -1 - 2\alpha + 4\beta \\ -3 - 6\alpha + 10\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□

Poseban slučaj sustava linearnih jednadžbi jest slučaj kada je $b = 0$ (kao nul-vektor), odnosno kada je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Tada s desne strane svih jednakosti u sustavu imamo nule. Taj sustav se naziva **homogenim sustavom**. Taj sustav sigurno ima barem jedno rješenje ($x = 0$ nul-vektor, jer tada je $Ax = A0 = 0 = b$).

Zadatak 1.9. Riješite homogeni sustav

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0. \end{array}$$

Rješenje. Rješavamo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \mid \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-4) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dobili smo sustav

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0, \\ x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 0. \end{array}$$

Označimo li $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, dobivamo preostala rješenja $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}t$. Konačno rješenje je jednoparametarskog oblika

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Do sada smo rješavali sustave gdje smo imali sve poznate koeficijente. No, moguće je da oni ovise o nekom nepoznatom parametru.

Zadatak 1.10. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite rješenje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3, \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2. \end{array}$$

Rješenje. Rješavamo sustav standardno kao što smo i do sada radili. Pritom nastojimo što manje raditi s parametrom a kako bi nam sustav ostao što jednostavniji. Također ne smijemo raditi množenje retka nekim brojem koji ovisi o a jer ne znamo množimo li (ili, još gore, dijelimo) s nulom. Idemo redom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a-3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(-a+1)+4 & 2-a \end{array}\right].$$

U posljednjem koraku smo pomnožili drugi redak brojem $1 - a$ i onda takav redak pribrojili trećem retku. To smijemo raditi jer je u toj transformaciji dozvoljeno množenjem bilo kojim brojem - čak i da smo množili s nulom i nismo ništa promijenili, sada smo barem sigurni da smo element na mjestu 3×2 pretvorili u 0.

Izraz na polju 3×3 trebamo malo raspisati:

$$(a+2)(-a+1) + 4 = -a^2 + a - 2a + 2 + 4 = -a^2 - a + 6.$$

Zatim, ovaj izraz bismo trebali faktorizirati. Tražimo nultočke ove kvadratne funkcije po standardnoj formuli:

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \Longrightarrow a_1 = -3, a_2 = 2.$$

Sada znamo da je $-a^2 - a + 6 = -(a - a_1)(a - a_2) = -(a+3)(a-2)$. Pritom smo ispred zagrada stavili predznak minus jer je vodeći koeficijent uz a^2 negativan. U konačnici, imamo matricu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a-3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right].$$

Inače bismo htjeli da je broj na mjestu 3×3 jednak 1 pa da možemo „očistiti" i treći stupac. No, ne znamo je li na tom mjestu već broj 0 i možemo li ga uopće pretvoriti u 1. A kada je jednak nuli, pitanje je imamo li na mjestu 4×3 (broj desno od iscrtkane linije) također nula ili ne, što određuje postojanost rješenja sustava. Primijetimo zapravo: za $a = 2$ će oba broja u trećem redu biti jednaka nuli, dok će za $a = -3$ samo prvi broj biti jednak nuli, a drugi neće - što upravo znači da sustav nema rješenja. Promotrimo prvo taj slučaj:

1. slučaj $a + 3 = 0$, tj. $a = -3$. Naš sustav je zapravo jednak

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

   Posljednji red nam daje jednadžbu $0 = 5$ koja ne može vrijediti, stoga u ovom slučaju sustav nema rješenja.

2. slučaj $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$. Imamo sustav

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Dobili smo jednadžbe

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 5z & = & 0, \\ & & y & + & 4z & = & 1. \end{array}$$

   Uvedimo $z = t$, $t \in \mathbb{R}$; dobivamo rješenja $x = 5t$, $y = 1 - 4t$. Ukupno,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t \\ 1-4t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   U ovom slučaju sustav ima beskonačno mnogo rješenja određenih jednim parametrom.

3. slučaj $(a + 3)(a - 2) \neq 0$, tj. $a \neq -3$ i $a \neq 2$. Na mjestu 3×3 u promatranoj matrici ipak nemamo nulu pa možemo množenjem sa $-\dfrac{1}{(a+3)(a-2)}$ pretvoriti taj element u 1 i dovršiti naš algoritam. Vrijedi:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -a-3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \left(-\dfrac{1}{(a+3)(a-2)}\right) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -a-3 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \qquad \leftarrow + \\ \cdot(a+3) \quad \cdot(-(a+2)) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \dfrac{a+2}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+3} \end{array}\right].$$

Uočimo još da je $1-\frac{a+2}{a+3}=\frac{a+3-a-2}{a+3}=\frac{1}{a+3}$. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.11. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 5. \end{array}$$

Rješenje. Raspisujemo:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

Primijetimo da smo ovime dobili traženi gornjetrokutasti oblik u lijevom dijelu matrice. Međutim, kako točno izgleda ovaj sustav jednadžbi?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2, \\ & & & & x_3 & = & -2, \\ & & & - & 3x_3 & = & 7. \end{array}$$

Primijetimo da ipak ima smisla napraviti još jednu elementarnu transformaciju! Naime, druga i treća jednadžba zasebno određuju vrijednost broja x_3 - određuju li te jednadžbe istu vrijednost, odnosno jesu li konzistentne? Provjerimo:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Zbog posljednjeg retka i nemoguće jednakosti $0 = 1$ zaključujemo da dani sustav nema rješenja! □

Iz ovog primjera dobro je upamtiti sljedeće: lijevi dio matrice svodimo na gornjetrokutastu matricu, no naiđemo li na nulu od nekog mjesta na dijagonali pa nadolje (kada nismo u situaciji zamijeniti dva retka i nastaviti s postupkom), dobro je potražiti sljedeći po redu stupac koji nije takvog oblika i nastaviti s postupkom.

U prethodnom zadatku, nakon prvog koraka, na drugom mjestu dijagonale imali smo nulu, kao i ispod nje. Sljedeći nenul element tog istog, drugog retka bio je broj 1 u trećem retku. Da je tu pisala nula, provjerili bismo imamo li sve nule ispod tog mjesta; ako neki od brojeva nije nula, radimo zamjenu. Ako su i ispod sve nule, nastavljamo s četvrtim stupcem, pa s petim, i tako dalje. Jednom kada na tom mjestu pronađemo nenul element (uz moguću zamjenu redaka), možemo se „spustiti” i prijeći na sljedeći red. Upravo taj postupak dovodi nas do maksimalno reduciranog oblika sustava jednadžbi!

1.3. Linearna nezavisnost

Promotrimo stupac–matricu $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Nju možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis nam sugerira da smo ovu opću matricu uspjeli prikazati preko konkretnih matrica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (pomnožili smo ih skalarima x i y te smo ih zbrojili). Tada kažemo da je matrica $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ linearna kombinacija matrica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. To možemo i općenito definirati za proizvoljne vektore i za proizvoljan broj vektora:

Definicija 1.5. Linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je bilo koji izraz oblika

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Po ovoj definiciji, za bilo koji vektor v možemo reći da je linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ako postoje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Ova definicija je povezana s našim prethodnim primjerom: matrica $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ je linearna kombinacija dviju matrica: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (koje god $x, y \in \mathbb{R}$ izabrali).

Mogli bismo razmišljati i obrnuto: možemo li pomoću određenih vektora (zbrajanjem i množenjem skalarima) dobiti druge vektore? Primjerice: je li $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ linearna kombinacija vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$? Kada bi bila, po definiciji bi to značilo da postoje neki $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sada bismo trebali pronaći te x i y. No, ovu jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 3x + 2y \end{bmatrix},$$

što je zapravo sustav triju jednadžbi s dvije nepoznanice, zapisan na isti način kao i u prethodnoj cjelini! Stoga ćemo tražene parametre tražiti kao što smo radili i do sada. Vrijedi:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rješenje sustava je $x = 2$ i $y = -1$. Uvrstimo li to u početnu jednadžbu, dobivamo traženi prikaz:

$$\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Probajmo nešto složeniji primjer: je li $\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix}$ linearna kombinacija sljedećih vektora: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$? Postoje li $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}?$$

Slično kao i u prethodnom primjeru, računamo:

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&0\\1&2&1&0\\0&1&1&2\\1&1&1&-1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&0\\0&1&-1&0\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&-1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Rješenje ovog sustava je $x = -3, y = z = 1$, a traženi prikaz je

$$\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ovu jednakost možemo zapisati i drugačije:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Iz ovog zapisa proizlazi motivacija za sljedećim pitanjem: postoje li $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$a\begin{bmatrix}0\\0\\2\\-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}?$$

Vjerojatno bismo prvo uočili trivijalno rješenje: $a = b = c = d = 0$; to rješenje zapravo i ne ovisi o tome kako izgledaju četiri stupčane matrice na lijevoj strani jednakosti budući da, pomnožene nulom, sve postaju nul-matrice. No, iz gornjeg primjera imamo i još jedno, netrivijalno rješenje: $a = 1, b = 3, c = d = -1$. Stoga je prirodno pitati se, za neke druge matrice ili opće vektore umjesto ovih četiri, postoji li neko drugo rješenje osim samih nula? U skladu s tim, uvodimo sljedeći pojam.

Definicija 1.6. Skup vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je **linearno nezavisan** ako jednakost

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

vrijedi jedino u slučaju kada je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

U suprotnom, ako gornja jednakost vrijedi i za neke $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ od kojih je barem jedan različit od nule, kažemo da je taj skup vektora **linearno zavisan**.

U skladu s ovom definicijom, vidimo, skup $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ je linearno zavisan skup vektora. S druge strane, skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ je linearno nezavisan skup vektora. Provjerimo to preko definicije: neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inače bismo išli preko proširene matrice sustava, no već ovdje (izjednačavanjem redaka matrica) vidimo da je rješenje sustava jedinstveno i to $x = y = z = 0$ – prema tome, promatrani skup vektora je linearno nezavisan.

Primijetimo, da smo ovdje dobili da postoji beskonačno mnogo rješenja, a samim time i bilo koje drugo rješenje osim samih nula, zaključili bismo da je skup vektora linearno zavisan.

Zadatak 1.12. Za koje parametre $a \in \mathbb{R}$ je skup vektora

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

linearno zavisan?

Rješenje. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Raspisujemo prošireni sustav:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \end{array} \right].$$

Razlikujemo dva slučaja:

1° Ako je $a-6=0$, tj. $a=6$, tada je dobivena matrica jednaka $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Jedino posljednji stupac nije do kraja „očišćen" pa stavljamo $z=t$ i raspisujemo jednadžbe

$$\begin{aligned} x+2t=0 &\Longrightarrow x=-2t, \\ y+3t=0 &\Longrightarrow y=-3t. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ -3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Kako ovaj rezultat interpretiramo s linearnom zavisnošću koja se traži od nas u zadatku? Trebali smo dobiti samo jedno rješenje i to oblika $x=y=z=0$, no rješenje je dano parametarski, imamo beskonačno mnogo rješenja. Nama je bitno samo jedno rješenje u kojem nemamo sve nule, pa za, recimo, $t=1$ dobivamo $x=-2, y=-3, z=1$. Zaključujemo, postoji još rješenja osim triju nula, pa je ovaj skup vektora $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ linearno zavisan.

2° Ako je $a-6 \neq 0$, tj. $a \neq 6$, treći redak dobivene matrice smijemo množiti sa $\dfrac{1}{a-6}$. Dobivamo

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a-6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rješenje ovog sustava je $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, odnosno $x=y=z=0$. Prema tome, skup vektora $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ je linearno nezavisan.

Konačno, u zadatku se tražilo za koje a je skup vektora linearno zavisan, što znači da nam odgovara samo prvi slučaj. Konačno rješenje je $a=6$. □

1.4. Rang matrice

Definicija 1.7. Rang matrice A je najveći broj linearno nezavisnih stupaca matrice. Taj broj označavamo sa $r(A)$.

Definicija zapravo kaže sljedeće: promatramo li matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

iz koje napravimo skup stupčanih matrica

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$$

i tražimo skup stupaca koji su linearno zavisni i koji bi, ako ubacimo bilo koji drugi stupac, postao linearno zavisan. Primjerice, ako je to skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{18} \\ a_{28} \\ \vdots \\ a_{m8} \end{bmatrix} \right\},$$

tada je $r(A) = 3$.

Što zapravo znači „*najveći broj* linearno nezavisnih stupaca"? Konkretno, ako je taj broj 3, možemo odabrati neka tri stupca koji zajedno čine linearno nezavisan skup. Ubacimo li bilo koji drugi stupac u skup (tako da ih ima 4 ili više), skup mora biti linearno zavisan - izgubili smo svojstvo nezavisnosti. No, da smo imali samo jedan ili dva stupca u skupu, mogli bismo dodati još neki stupac tako da ne gubimo nezavisnost (recimo, da smo u gornjem skupu imali samo stupce 2 i 8, mogli bismo dodati stupac 3, no dalje više ne smijemo dodavati). Stoga, rang je uvijek prirodan broj ili nula. Rang je nula samo za nul–matricu (čim matrica ima neki nenul stupac, tada je taj stupac linearno nezavisan i rang je barem jedan).

Za rang se može pokazati da vrijedi sljedeće:

- Rang matrice jednak je najvećem broju linearno nezavisnih redaka (umjesto stupaca), odnosno $r(A) = r(A^\tau)$. Kao broj linearno nezavisnih redaka, rang matrice je manji ili jednak ukupnom broju redaka matrice A, što je m. Kao broj linearno nezavisnih stupaca, rang je manji ili jednak ukupnom broju stupaca matrice A, odnosno n. Dakle, $r(A) \leq \min\{m, n\}$.
- Rang matrice ostaje nepromijenjen ako na nju primijenimo bilo koju elementarnu transformaciju nad redcima (zamjena redaka, množenje redaka brojem različitim od nule, pribrajanje retku neki drugi redak pomnožen brojem).

Po prvoj točki, svejedno je promatramo li retke ili stupce; to utječe na drugu točku na način da su nam još neke transformacije dozvoljene:

- Rang matrice ostaje nepromijenjen ako:
  - zamijenimo bilo koja dva stupca,
  - pomnožimo neki stupac brojem različitim od nule,
  - nekom stupcu pribrojimo drugi stupac pomnožen brojem.

Kada smo na matricu (koja je predstavljala neki sustav jednadžbi) djelovali elementarnim transformacijama, primijetili smo da matricu možemo dovesti do trokutastog oblika, s time da možemo dobiti i nul retke. Zanimljivo, upravo broj tih nenul redaka predstavlja rang te matrice! Time dobivamo zaključak koji nam ujedno govori i kako ćemo računati rang matrice:

▷ Rang matrice jednak je broju nenul redaka/stupaca reducirane (trokutaste) matrice koja je od početne matrice nastala primjenom elementarnih transformacija.

Zadatak 1.13. Odredite rang sljedećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje. (a) Vrijedi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prisjetimo se: inače bismo drugi redak matrice podijelili s 3 kako bismo imali jedinice na dijagonali; dodatno, radili smo takve operacije da je ta jedinica jedini element u tom stupcu različit od nule. Ovdje to *nije potrebno* jer nas ne zanimaju rješenja nekog sustava jednadžbi, već samo koliko daleko „možemo doći" s trokutastim oblikom matrice. Imajmo to na umu kod računanja ranga matrice za jednostavniji i kraći račun.

Iz ovoga iščitavamo rješenje: $r(A) = 2$ (kao broj nenul redaka).

(b) Sada ćemo demonstrirati upotrebu elementarnih operacija i nad stupcima (što sada kod ranga možemo, a prije nismo smjeli), budući da matrica ima manje stupaca nego redaka, elementarnim transformacijama nad stupcima ćemo prije doći do trokutastog oblika matrice i do rješenja. Vrijedi:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 11 & 6 & 17 \\ 3 & 7 & 10 & 17 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 11 & -5 & -5 \\ 3 & 7 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 11 & -5 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konačno rješenje je broj nenul stupaca, $r(B) = 3$.

□

Zadatak 1.14. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{array}{c} \cdot(-1) \qquad\qquad + \\ \cdot(-1) \;\; + \qquad\quad \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

U ovom trenutku bismo drugi stupac matrice množili sa $\dfrac{1}{\lambda - 1}$ - da smijemo, odnosno da smo sigurni da $\lambda - 1$ nije jednako nula. Stoga radimo slučajeve:

1° slučaj: $\lambda = 1$. Time je naša matrica A ekvivalentna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A) = 1$ (imamo samo jedan nenul stupac).

2° slučaj: $\lambda \neq 1$. Vrijedi

$$\begin{array}{c} \cdot\dfrac{1}{\lambda - 1} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & (\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ 1 & (\lambda - 1)(\lambda + 1) & \lambda - 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \cdot-(\lambda-1)(\lambda+1) \qquad + \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (\lambda - 1)(\lambda + 1) \\ 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1) \end{bmatrix}.$$

Rang matrice ovisi o elementu na mjestu 3×3 koji je jednak $\lambda - 1 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1) = (\lambda - 1)(1 - \lambda^2 - 2\lambda - 1) = (\lambda - 1)(-\lambda)(\lambda + 2)$. Imamo još dva slučaja:

$1^{\circ\circ}$ slučaj $\lambda = 0$ ili $\lambda = 2$: posljednji stupac sadrži sve nule pa je $r(A) = 2$.

$2^{\circ\circ}$ slučaj $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 2$: element na mjestu 3×3 nije nula, stoga je $r(A) = 3$.

□

Rang matrice posebno je važan za određivanje oblika rješenja sustava jednadžbi. Točnije, pomoću ranga, bez rješavanja sustava, možemo ustvrditi je li rješenje promatranog sustava jedinstveno ili, ako ima beskonačno mnogo rješenja, o koliko će parametara ovisiti naše rješenje. To se može ustvrditi pomoću **Kronecker-Capellijevog teorema** koji kaže: sustav

$$Ax = b$$

ima rješenje ako i samo ako matrice A i proširena matrica $\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]$ imaju isti rang; tj.

$$r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right).$$

To zapravo znači da prilikom određivanja ranga matrice $\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]$ obavezno moramo dobiti nul-redak (ili nul-stupac). No, možemo reći i nešto više: ako sustav ima n nepoznanica (tj. matrica A ima n stupaca), tada vrijedi:

- ako je $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right) = n+1$, tada sustav nema rješenja,
- ako je $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right) = n$, tada sustav ima jedinstveno rješenje,
- ako je $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right) = m < n$, tada sustav ima beskonačno rješenja i broj parametara o kojima će ovisiti rješenje je $n-m$.

Zadatak 1.15. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje sustav

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 0, \\ x & + & ay & + & z & = & 0, \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}$$

ima jednoparametarsko rješenje.

Rješenje. Odredimo rang proširene matrice sustava.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot(-a) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right].$$

Ako je $a = 1$, tada su drugi i treći redak matrice nul-redci pa je rang proširenog sustava $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right) = 1 < n = 3$. U tom slučaju imamo beskonačno mnogo rješenja izraženih preko $3-1 = 2$ parametra, što nije traženo rješenje zadatka. Nastavljamo za slučaj $a \neq 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right].$$

Vrijedi $2 - a - a^2 = (2+a)(1-a)$. U slučaju $a = -2$, rang ove matrice je 2 (matrica ima samo jedan nul–redak) i sustav ima beskonačno rješenja s $3-2 = 1$ parametrom, što je traženo rješenje! U slučaju da je $a \neq -2$, nemamo nul–redaka, rang matrice je 3 i rješenje sustava je jedinstveno, što nas ne zanima.

Konačno rješenje je: za $a = -2$ sustav ima jednoparametarsko rješenje. $\square$

1.5. Determinante

Pojam determinante matrice zahtijeva malo više matematičkih alata i teorije koju ovdje na vježbama nećemo raditi. Formalno, za matricu $A = [a_{ij}]$ to je broj oblika

$$\sum_p (-1)^{I(p)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

pri tome su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi brojevi od 1 do n u nekom poretku, a $I(p)$ određuje predznak ispred produkta.

Na sreću, determinanta matrice se može relativno jednostavno računati pomoću određenih pravila, što će biti dovoljno za naš interes. Treba naglasiti:

- determinanta se definira <u>samo za kvadratne matrice</u>,
- za matricu A, oznake za determinantu su $\det(A)$ i $|A|$.

Determinanta matrice 1×1 je jednostavna: $|a| = a$ (oprez: izraz s lijeve strane jednakosti nije apsolutna vrijednost broja a!); taj slučaj nije od posebnog interesa. Lako je odrediti determinantu i za matrice reda 2×2. Općenito vrijedi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Dakle, determinanta matrice oblika 2×2 dobiva se oduzimanjem produkta sporedne dijagonale od produkta glavne dijagonale.

Za matricu reda 3×3 koristimo **Sarrusovo pravilo**. Pravilo kaže sljedeće: matrici

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

s desne strane nadopišemo ponovo prvi i drugi stupac; tako dobivamo

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Sada povlačimo kose crte od gore lijevo prema dolje desno; označene brojeve pomnožimo i zbrojimo. Zatim povlačimo kose crte od gore desno prema dolje lijevo; te brojeve pomnožimo i oduzmemo. Po tome dobivamo

$$\begin{array}{ccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}.$$
$$\begin{array}{ccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

Napomena: Sarrusovo pravilo vrijedi isključivo za matrice reda 3×3!

Zadatak 1.16. Izračunajte determinantu matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & -2 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right. &= 3 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 + (-5) \cdot 8 \cdot 1 - (-5) \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 8 \cdot 8 \\ &= 168 - 16 - 40 + 70 + 6 - 256 = -68. \end{aligned}$$

$\square$

Za kvadratne matrice većeg reda koristimo **Laplaceov razvoj determinante** po elementima i-tog retka. Za matricu A označimo sa A_{ij} matricu nastalu izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca; primjerice, za matricu A u zapisu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

vrijedi

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo, ako je matrica A tipa $n \times n$, onda je A_{ij} matrica tipa $(n-1) \times (n-1)$. Za determinantu matrice A vrijedi

$$\begin{aligned} \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) =& (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) \\ &+ \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}). \end{aligned}$$

Dakle, „šećemo” po i-tom retku, mijenjajući predznak iz plusa u minus i obratno, i množimo element tog retka s determinantom matrice bez i-tog retka i stupca u kojem se nalazimo.

Ovo pravilo je korisno jer računanje determinante matrice reda $n \times n$ svodi na računanje za matricu jednog reda manje, $(n-1) \times (n-1)$. Po potrebi, Laplaceov razvoj možemo primijeniti više puta sve dok ne dođemo do dovoljno malenog reda matrice (recimo do matrice tipa 3×3 za koju možemo upotrijebiti Sarrusovo pravilo, ili matrice tipa 2×2 za čiju determinantu imamo jednostavnu formulu) ili do neke matrice koja je u „pogodnom obliku” (pr. trokutaste matrice; kasnije ćemo to spomenuti).

Napomena 1.8. Prilikom korištenja Laplaceovog razvoja, dobro je gledati postoji li redak koji sadrži što više nula. Naime, u gornjoj sumi će vrijediti $a_{ij} = 0$ pa ćemo imati manje računanja i razvoja determinanti.

Zadatak 1.17. Odredite $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Rješenje. U ovom zadatku koristit ćemo Laplaceov razvoj determinante sve dok ne dođemo do matrica reda 2×2. Pritom imajmo na umu napomenu prije ovoga zadatka.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{4. retku}}}{=} (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (-1)^{4+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= - \left((-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - \left((-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) \\
&= - (5 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) - (-(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 2(1 \cdot 0 - 5 \cdot 2)) \\
&= - 25 + 23 = -2.
\end{aligned}
$$

□

Determinanta matrice zadovoljava razna svojstva koja će nam pomoći prilikom računanja:

- Determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali. U općem zapisu, $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

- Vrijedi $\det(A) = \det(A^\tau)$.

  – Iz ovog pravila dobivamo da je u nekim situacijama svejedno radimo li nad redcima ili nad stupcima. Primjerice, Laplaceov razvoj radili smo po redcima, no možemo ga na isti način raditi i po stupcima:

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) =& (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) \\
&+ \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}).
\end{aligned}
$$

- Zamjenom dvaju stupaca ili redaka u matrici mijenja se predznak determinante.

- Kod determinanti možemo izlučivati broj iz pojedinog stupca ili retka (ne iz cijele matrice) te možemo zbrajati po pojedinim stupcima ili redcima (ne po cijeloj matrici).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{i1} + \beta c_{i1} & \alpha b_{i2} + \beta c_{i2} & \dots & \alpha b_{in} + \beta c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha b_{1j} + \beta c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \alpha b_{2j} + \beta c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha b_{nj} + \beta c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Oprez: općenito ne vrijedi $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$!

- Determinanta se ne mijenja ako jednom stupcu/retku pribrojimo drugi stupac/redak pomnožen brojem.

Zadatak 1.18. Odredite $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

Rješenje. Cilj je pomoću transformacija, bilo nad stupcima, bilo nad redcima, dobiti redak ili stupac sa što više nula. Stoga računamo

$\cdot(-1)$ $+$

$\cdot(-1)$ $+$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{1. retku}}}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) \\ &= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

Alternativno, za ovaj zadatak mogli smo primijeniti Sarrusovo pravilo budući da je u pitanju matrica reda 3×3. □

Zadatak 1.19. Izračunajte

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. (a) Ovu determinantu ćemo odrediti svođenjem matrice na trokutasti oblik (bilo gornjetrokutasti, bilo donjetrokutasti). Tada po ranije navedenim svojstvima znamo da će determinanta biti jednaka produktu elemenata na dijagonali.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1)\ \cdot 2 \\ + \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{izlučivanje} \\ \text{iz 3. retka}}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8)$$
$$= 24.$$

(b) Vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{1. stupcu}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{2. retku}}}{=} (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{3. retku}}}{=} -1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1.$$

□

Zadatak 1.20. Riješite jednadžbu $\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & x-2 & x-2 & x-2 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-3 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$

Rješenje. Prvo raspišimo danu determinantu; primijetimo da će ovdje biti zgodnije ako, umjesto s elementom na mjestu 1×1, radimo transformacije tako da od jednog retka oduzmemo onaj iznad njega. Naime, dva susjedna reda imaju više jednakih elemenata u istim stupcima pa ćemo tako dobiti više nula u matrici.

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & x-2 & x-2 & x-2 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-3 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}
= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & x-2 & x-2 & x-2 \\ x-1 & x-2 & x-3 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & x-2 & x-2 & x-2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix}
= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&=(x-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1-x.
\end{aligned}
$$

Treba riješiti jednadžbu $1 - x = 0$, a rješenje je $x = 1$. □

1.6. Inverz matrice

Definicija 1.9. Matrica A je **invertibilna/regularna** ako postoji matrica B takva da vrijedi $AB = BA = I$. Tada kažemo da je B **inverz** od A i uvodimo oznaku $A^{-1} = B$.

Ako matrica A nije regularna, tada kažemo da je **singularna**.

Primijetimo prvo, ako je A invertibilna matrica, tada mora biti kvadratna; naime, matrice A i B su ulančane i B i A su ulančane matrice. Pamtimo, promatramo inverze isključivo kvadratnih matrica jer pojam inverza matrice koja nije kvadratna nema smisla.

Dobro je znati da je inverz matrice jedinstven; to znači da postoji samo jedna matrica B koja zadovoljava gornju definiciju. Sada se nameće pitanje kako odrediti (jedinstveni) inverz neke matrice. Inverz matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ reda 2×2 jednostavno je odrediti:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Jednostavno pamtimo: ispred imamo $\frac{1}{\det(A)}$, zamijenimo elemente na glavnoj dijagonali, a elementima na sporednoj dijagonali promijenimo predznak.

Za matrice većeg reda nemamo opće formule (i stvarno nema smisla da ih pamtimo), no postoji standardni postupak određivanja inverza matrice, opet pomoću elementarnih transformacija. Vrijedi: ako je A regularna matrica, može se elementarnim transformacijama nad redcima svesti na jediničnu matricu.

Zadatak 1.21. Odredite inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Postupak je sljedeći: matricu proširimo tako da nadodamo pored nje jediničnu matricu. Zatim danu matricu (koja se sada nalazi u lijevome bloku) elementarnim transformacijama svodimo na jediničnu, time mijenjajući također i nadodanu matricu. Rješenje će biti novodobivena matrica kojom smo proširili početnu matricu (u trenutku kada u lijevome bloku dobijemo jediničnu matricu, u desnome bloku se nalazi inverz početne matrice).

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Traženi inverz je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Pokaže se da je za matricu A reda $n \times n$ ekvivalentno:

- A je regularna matrica,
- $\det A \neq 0$,
- $r(A) = n$, tj. A je punog ranga.

Naravno, to znači da su ekvivalentne i sljedeće tvrdnje:

- A je singularna matrica,
- $\det A = 0$,
- $r(A) < n$.

Ove ekvivalencije su korisne u slučaju kada se pitamo postoji li inverz neke matrice, odnosno je li neka matrica regularna; mnogo je lakše odrediti determinantu ili pak rang nego eksplicitno tražiti inverz matrice.

Prisjetimo se Kronecker-Capellijevog teorema: po njemu, sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right]\right) = n$, pa iz toga i iz gornjih ekvivalencija zaključujemo da je rješenje sustava jedinstveno ako i samo ako je $\det A \neq 0$. Tada je A regularna i rješenje je dano sa $x = A^{-1}b$.

Zadatak 1.22. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{bmatrix}$$

singularna.

Rješenje. Po gornjim ekvivalencijama, najlakše je ispitati čemu je jednaka determinanta matrice, budući da ne moramo eksplicitno tražiti inverz. Mogli bismo određivati i rang, no to će zahtijevati diskusiju po slučajevima, a to zahtijeva nešto više posla.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ + \\ \cdot(-1) \\ + \end{array}
=
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix}
\overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{4. retku}}}{=}
$$

$$
=(-1)^{4+4}(4-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-x^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}
\overset{\substack{\text{Laplaceov} \\ \text{razvoj po} \\ \text{2. retku}}}{=}
(4-x^2)(-1)^{2+2}(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(4-x^2)(1-x^2)(1\cdot 1-2\cdot 2) = -3(2-x)(2+x)(1-x)(1+x).
$$

Zanima nas kada je determinanta jednaka nuli, dakle rješenje je $x \in \{\pm 1, \pm 2\}$. □

Sljedeći važan rezultat je **Binet-Cauchyjev** teorem koji kaže da za svake dvije kvadratne i ulančane matrice A i B vrijedi

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Osim što olakšava računanje determinante nešto složenijih matrica, ova jednakost povlači i zanimljive posljedice. Primjerice, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\det(A^n) = (\det(A))^n .$$

To dobivamo uzastopnom primjenom Binet-Cauchyjevog teorema (točnije, primjenom $n-1$ puta).

Možemo nešto zaključiti i o determinanti inverza A^{-1} u slučaju kada je matrica A regularna! Naime, vrijedi

$$AA^{-1} = I.$$

Matrica s lijeve strane jednakosti jednaka je jediničnoj, pa su im i determinante jednake:

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(I).$$

Lijevu stranu sada znamo raspisati: $\det\left(AA^{-1}\right) = \det(A)\det\left(A^{-1}\right)$. Znamo i determinantu jedinične matrice: to je trokutasta matrica (štoviše, dijagonalna), pa samo treba pomnožiti elemente na dijagonali: $\det(I) = 1^n = 1$. Dakle:

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1.$$

Matrica A je regularna pa je $\det(A) \neq 0$; smijemo dijeliti jednadžbu tim brojem, iz čega dobivamo

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Zadatak 1.23. Neka su A i B regularne matrice. Pokažite da je AB regularna matrica i da vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Rješenje. Kako su A i B regularne matrice, vrijedi $\det A \neq 0$ i $\det B \neq 0$. Iz toga i iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$, pa je prema tome i AB regularna matrica.

Zadan je oblik inverza koji moramo pokazati, pa je samo potrebno provjeriti da ta matrica zadovoljava definiciju inverza. Vrijedi:

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Definicija inverza matrice vrijedi ako umjesto $(AB)^{-1}$ pišemo $B^{-1}A^{-1}$, pa prema tome vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Zadatak 1.24. Neka je $A^3C - 2C = B$. Odredite $\det C^{-2}$ ako je $\det B = 5$ i $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Raspišimo prvo danu jednadžbu. Primjećujemo da možemo izlučiti matricu C, ali samo zdesna (nikako slijeva, jer množenje nije komutativno!):

$$\left(A^3 - 2I\right)C = B.$$

Bilo bi dobro kada bi matrica $A^3 - 2I$ bila invertibilna pa da jednadžbu pomnožimo slijeva njenim inverzom. Za sada računajmo kao da je to moguće; vrijedi

$$C = \left(A^3 - 2I\right)^{-1} B.$$

Za determinantu tada vrijedi

$$\det C = \det\left(\left(A^3 - 2I\right)^{-1} B\right) \overset{\substack{\text{Binet-}\\ \text{Cauchy}}}{=} \det\left(\left(A^3 - 2I\right)^{-1}\right)\det B = \frac{\det B}{\det\left(A^3 - 2I\right)}.$$

Slijedi:

$$\det\left(C^{-2}\right) = \frac{1}{(\det C)^2} = \left(\frac{\det\left(A^3 - 2I\right)}{\det B}\right)^2.$$

Ovo je maksimalno što smo mogli napraviti bez raspisivanja matrica. Preostaje još raspisati matricu $A^3 - 2I$. Vrijedi

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$
$$A^3 - 2I = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi

$$\det\left(A^3 - 2I\right) = -6 \cdot (-6) - 4 \cdot 4 = 20.$$

Budući da je $\det\left(A^3 - 2I\right) \neq 0$, $A^3 - 2I$ je regularna matrica i to opravdava naše množenje s $\left(A^3 - 2I\right)^{-1}$ prilikom računanja. Konačno rješenje je

$$\det\left(C^{-2}\right) = \left(\frac{20}{5}\right)^2 = 4^2 = 16.$$

□

1.7. Matrične jednadžbe

U zadacima s jednadžbama zapisanih preko matrica dobro ih je raspisati što je više moguće. Time možemo znatno pojednostavniti izraz i zadatak svesti na mnogo jednostavniji matrični račun nego što se na prvu čini po samom zadatku.

Zadatak 1.25. Riješite jednadžbu

$$(AX)^{-1} + 2X^{-1} = B$$

ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Kao što smo napomenuli, jednadžbu prvo pojednostavljujemo prije uvrštavanja konkretnih matrica. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
(AX)^{-1} + 2X^{-1} &= B, \\
X^{-1}A^{-1} + 2X^{-1} &= B, \\
X^{-1}\left(A^{-1} + 2I\right) &= B \;/ \cdot \left(A^{-1} + 2I\right)^{-1} \quad \text{(množenje zdesna!)}, \\
X^{-1} &= B\left(A^{-1} + 2I\right)^{-1} \;/^{-1}, \\
X &= \left(A^{-1} + 2I\right)B^{-1}.
\end{aligned}$$

Dakle, moramo odrediti inverze matrica A i B i još obaviti pokoje zbrajanje i množenje. Matrice su tipa 2×2 pa po formuli odmah znamo njihove inverze.

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A^{-1} + 2I &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \\
B^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Konačno,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 1.26. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

izračunajte

$$A^{-1}\left(A^2 + A^{-1}\right)\left(A + A^{-2}\right) - \left(2A^{-1} + A^{-4}\right).$$

Rješenje. Prvo pojednostavnimo izraz:

$$\begin{aligned}
A^{-1}\left(A^2 + A^{-1}\right)\left(A + A^{-2}\right) - \left(2A^{-1} + A^{-4}\right) &= \left(A + A^{-2}\right)\left(A + A^{-2}\right) - 2A^{-1} - A^{-4} \\
&= A^2 + A^{-1} + A^{-1} + A^{-4} - 2A^{-1} - A^{-4} = A^2.
\end{aligned}$$

Preostaje samo kvadrirati matricu:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Poglavlje 2

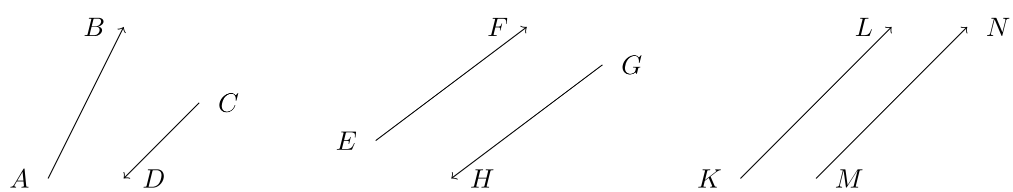
Vektori

Intuitivno, vektor pamtimo kao „strelicu": ima početnu točku A, završnu točku B i te dvije točke povežemo strelicom usmjerenom prema B. Tako smo vektor nazivali i *usmjerenom dužinom* te označavali $\overrightarrow{AB}$.

Pamtimo također da su vektori imali tri karakteristike: *duljinu, smjer i orijentaciju.* Pritom, pomalo neintuitivno, smjer predstavlja pravac na kojem taj vektor leži (a ne kamo je usmjeren), dok je orijentacija zapravo „usmjerenost" u jedno od dva moguća smjera na nekom pravcu.

Dodatna stvar: nekad smo vektore smatrali istima čak i ako nisu sasvim identični. Naime, dovoljno je da su vektori jednake duljine, na paralelnim pravcima i jednako usmjereni - dakle, sve im je isto osim što mogu biti na paralelnim pravcima. Često kažemo i da ti vektori pripadaju istoj „klasi", pa su jednaki u smislu da predstavljaju dvije iste klase vektora.

(Ovdje će jednog dana doći slika!!!!!!!) - nisam sigurna što bih točno trebala staviti na sliku? za sad sam samo prikazala vektore iz iste klase i iz različitih klasa Na sljedećoj slici su prikazani redom: dva različita vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ (različite duljine i različitih smjerova), dva vektora jednake duljine, jednakih smjerova i različite orijentacije $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{GH}$ te dva jednaka vektora $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{MN}$ (jednakih duljina, smjerova i orijentacije).



U ovom poglavlju promatrat ćemo vektore u prostoru $\mathbb{R}^3$. Vektore ćemo standardno označavati strelicom: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$. Tako ćemo intuitivno definirati duljinu vektora:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Za vektore u $\mathbb{R}^3$ postoji posebna karakteristika za pripadnost istoj klasi; svi vektori koji su jednaki nekom vektoru $\overrightarrow{AB}$ imaju jednaku razliku završne i početne točke $B - A = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Zadatak 2.1. Neka su $A = (1, 2, 3), B = (2, -4, 6)$ i $C = (1, 0, 2)$. Odredite točku $D \in \mathbb{R}^3$ takvu da vrijedi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Rješenje. Označimo traženi vektor $D = (x, y, z)$. Da bi vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ bili jednaki, trebalo bi vrijediti

$$\begin{aligned} B - A &= D - C, \\ (2, -4, 6) - (1, 2, 3) &= (x, y, z) - (1, 0, 2), \\ (1, -6, 3) &= (x - 1, y, z - 2). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem po koordinatama dobivamo $1 = x - 1$, $-6 = y$ i $3 = z - 2$, odnosno $D = (x, y, z) = (2, -6, 5)$. □

Posebno je interesantan slučaj ako je u pitanju početna točka ishodište, odnosno $O = (0, 0, 0)$. Za prethodni zadatak vrijedi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD'}$ pri čemu je $D' = (1, -6, 3)$.

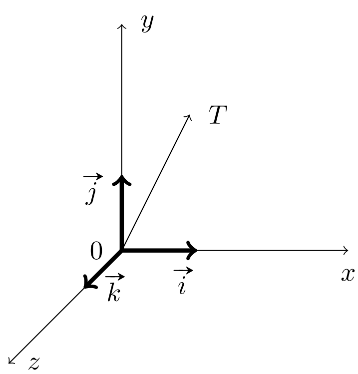
Naime, promatramo li samo one vektore kojima je početna točka O, tada su vektori jednaki baš kada se poklapaju i vizualno; nemamo slučajeve paralelnih, a istih vektora. Svaki vektor oblika $\overrightarrow{OT}$, odnosno vektor koji polazi iz ishodišta, nazivamo **radijvektor**.

Radijvektori imaju još jedan praktičan zapis, pomoću jedinične baze vektora. Uzmimo da je $T = (1, 2, 3)$. Vektor $\overrightarrow{OT}$ možemo zapisati i ovako:

$$\overrightarrow{OT} = (1, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}.$$

Pritom smo označavali $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Te vektore smo pamtili kao jedinične vektore koji se nalaze na trima koordinatnim osima i oni tvore bazu u kojoj možemo prikazati svaki vektor iz $\mathbb{R}^3$.

(Ovdje će jednog dana doći slika!!!!!!!) - opet nisam sigurna što bi točno trebalo biti prikazano na slici i jesam li dobro napravila



2.1. Skalarni produkt

Definicija 2.1. **Skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, definira se formulom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Vrijedi sljedeće:

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti ako je kut među njima $90°$. Po formuli tada dobivamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos 90° = 0$. Zaključujemo:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

- Svaki vektor sam sa sobom zatvara kut od 0°. Prema tome,
$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 .$$
(Pripazimo: izraz $\vec{a}^2$ nije „kvadriranje vektora” jer to nema smisla; to je jednostavno oznaka za vektor (skalarno) pomnožen samim sobom.)

- Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ su međusobno okomiti. Po prvoj točki vrijedi
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$
Ti vektori su duljine 1 pa po drugoj točki slijedi
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \text{odnosno,} \quad \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1.$$

- Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ proizvoljni vektori. Zapišimo ih pomoću baznih jediničnih vektora:
$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}.$$
Kod skalarnog množenja vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju. To znači da, kod množenja izraza sa zagradama, možemo izmnožiti izraz „svaki sa svakim”. Slijedi
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} =& \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}\right) \cdot \left(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}\right)\\ =& a_1 b_1 \vec{i}^2 + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k}\\ &+ a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j}^2 + a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k}\\ &+ a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k}^2\\ =& a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.\end{aligned}$$
Time dobivamo još jednu formulu za računanje skalarnog produkta koju ćemo često koristiti:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Direktno iz definicije, a možemo to vidjeti i po prethodnoj formuli, slijedi da je skalarno množenje vektora komutativno, odnosno da vrijedi
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Zadatak 2.2. (a) Odredite $x \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a} = (1, x, 1)$ i $\vec{b} = (2, 1, 0)$ okomiti.

(b) Odredite kut između vektora $\vec{a} = (1, 2, -1)$ i $\vec{b} = (-1, 2, -1)$.

Rješenje. (a) Vrijedi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + x \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 + x$. Da bi $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili okomiti, ovaj izraz treba biti jednak nuli, stoga je jedino rješenje $x = -2$.

(b) Vrijedi
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 4,\\ |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},\\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Uvrstimo to u formulu za skalarni produkt:

$$4 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$
$$\cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ovaj kut ne znamo eksplicitno odrediti, pa zapisujemo konačno rješenje kao

$$\measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \arccos \frac{2}{3}.$$

□

Zadatak 2.3. Neka su $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (-1, -2, -1)$, pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}$. Odredite parametar λ takav da vrijedi $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda \\
(-2, 4\lambda - 2, 2\lambda - 1) \cdot (-1, -2, -1) &= (0, 2\lambda, \lambda) \cdot (-1, -2, -1) + \lambda \\
2 - 8\lambda + 4 - 2\lambda + 1 &= -4\lambda - \lambda + \lambda \\
-6\lambda &= -7 \\
\lambda &= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.4. Odredite kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 2$ te $\vec{a} + \vec{b} \perp 7\vec{a} - 5\vec{b}$.

Rješenje. Umjesto direktnog korištenja formule za skalarni produkt, iskoristit ćemo okomitost vektora navedenih u zadatku. Vrijedi

$$\begin{aligned}
0 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(7\vec{a} - 5\vec{b}\right) &= 7\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 7\vec{b} \cdot \vec{a} - 5\vec{b}^2 = 7|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\left|\vec{b}\right|^2 \\
&= 7 \cdot 2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 5 \cdot 2^2 = 8 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.
\end{aligned}$$

Iz ovoga dobivamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$. S druge strane, iz formule za skalarni produkt dobivamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 \cdot \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 4 \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Izjednačavanjem slijedi

$$-4 = 4 \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Longrightarrow \cos \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1 \Longrightarrow \measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \arccos(-1) = \pi.$$

□

Zadatak 2.5. Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

(a) Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ okomiti.

(b) Odredite duljinu vektora $\vec{r} = 4\vec{p} - 23\vec{q}$.

Rješenje. (a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\vec{p} \cdot \vec{q} = \left(\lambda\vec{a} + 17\vec{b}\right) \cdot \left(3\vec{a} - \vec{b}\right) &= 3\lambda|\vec{a}|^2 + (51 - \lambda)\,\vec{a} \cdot \vec{b} - 17\left|\vec{b}\right|^2 \\
&= 12\lambda - 425 + (51 - \lambda)\,\vec{a} \cdot \vec{b}.
\end{aligned}$$

Za skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 2\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$. Uvrstimo li to gore te iskoristimo da želimo da bude $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, dobivamo

$$12\lambda - 425 + (51-\lambda)\cdot(-5) = 12\lambda - 425 - 255 + 5\lambda = 17\lambda - 680 = 0.$$

Traženo rješenje je $\lambda = 40$.

(b) Ne znamo prikaz vektora $\vec{r}$ preko koordinata pa ne možemo iskoristiti direktnu formulu za duljinu vektora u $\mathbb{R}^3$. No, ta nam formula neće ni trebati! Poslužimo se trikom o produktu vektora samim sobom, no prije toga izrazimo vektor $\vec{r}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Vrijedi

$$\vec{r} = 4\vec{p} - 23\vec{q} = 4\left(40\vec{a} + 17\vec{b}\right) - 23\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) = 91\vec{a} + 91\vec{b} = 91\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}|\vec{r}|^2 &= \vec{r}\cdot\vec{r} = 91\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot 91\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = 91^2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\\ &= 91^2\left(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2\right) = 91^2\,(4-10+25) = 91^2\cdot 19.\end{aligned}$$

Ne zaboravimo još korjenovati ovu jednakost; dobivamo rješenje $|\vec{r}| = 91\sqrt{19}$.

□

2.2. Vektorski produkt

Definicija 2.2. **Vektorski produkt** dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$, definira se kao vektor čiji smjer je okomit na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$ za čiju duljinu vrijedi

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

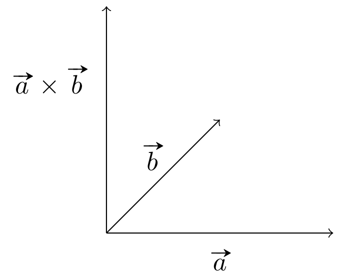
te tako orijentiran da uređena trojka $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)$ čini desni sustav.

Što zapravo znači „desni sustav” neke „uređene trojke”? To zapravo znači da tri vektora, točno u ovom redoslijedu, zauzimaju poseban položaj u ravnini. Možda ste čuli za „pravilo desne ruke”: kažiprst i srednji prst desne ruke određuju vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a onda ispruženi palac određuje orijentaciju (a time i smjer) vektora $\vec{a}\times\vec{b}$. Znamo da je svaki vektor određen s tri komponente, pa je gornjom formulom dodatno utvrđena i duljina vektora $\vec{a}\times\vec{b}$.

Inače, „desni sustav” se može i precizno, matematički definirati: uređena trojka $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, pri čemu su $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c} = (c_1,c_2,c_3)$, čini desni sustav/pozitivno je orijentirana ako je $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} > 0$. U slučaju da je ta determinanta manja od nule, onda je trojka negativno orijentirana.

Primijetimo i upamtimo: skalarni produkt dvaju vektora je realan broj, a vektorski produkt dvaju vektora je vektor!

SLIKA!!!! - jel ovo okej slika, odnosno jel to to što bi trebalo stajati tu?



Ova definicija daje nam duljinu vektorskog produkta, no htjeli bismo i konkretno odrediti koji je to vektor. Može se pokazati da za vektore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}.$$

Na prvu nezgrapna i ne baš pamtljiva formula, ima mnogo zgodniji zapis:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Po zapisu, ovo je determinanta matrice reda 3×3, s time da su elementi prvog retka vektori, a ne brojevi. Napravimo li Laplaceov razvoj po prvom retku, dobivamo točno gornje zapisanu formulu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}.$$

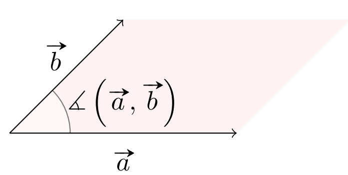
Slična „lijepa” svojstva vrijede za vektorski produkt baš kao i za skalarni, osim jednog: vrijedi

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Dakle, vektorski produkt nije komutativan, već antikomutativan. Još jedno korisno svojstvo vektorskog produkta je da za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, gdje je $\vec{0}$ nul–vektor (ova jednakost se može provjeriti pomoću formule za vektorski produkt preko determinante matrice ili se jednostavno vidi iz definicije duljine vektorskog produkta budući da je nul–vektor jedini vektor čija je duljina 0).

Vektorski produkt koristan je i za računanje površina trokuta i paralelograma. Točnije, površina trokuta razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je $P_\triangle = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, dok je površina paralelograma razapetog istim vektorima jednaka $P_\square = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

SLIKA!!!! x2 - jel ovo okej slika ili treba nesto drugo?



Zadatak 2.6. Odredite površinu trokuta s vrhovima $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 2)$ i $C(3, 3, 0)$.

Rješenje. Prvo ćemo odrediti vektore koji predstavljaju bilo koje dvije od tri stranice trokuta; uzmimo $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,2) - (1,2,3) = (-1,-3,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (3,3,0) - (1,2,3) = (2,1,-3).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-3 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1)\,\vec{i} - (-1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2)\,\vec{j} + (-1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\,\vec{k} \\ &= 10\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 5\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Konačno,

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 25 + 25} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

□

Zadatak 2.7. Dan je paralelogram $ABCD$ za koji vrijedi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$; pritom su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ vektori za koje vrijedi $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ i $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

(a) Odredite površinu tog paralelograma.

(b) Odredite duljinu visine paralelograma na stranicu $\overline{AB}$.

Rješenje. (a) Raspišimo čemu je jednako $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} &= (3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (\vec{p} + 5\vec{q}) = 3\vec{p} \times \vec{p} + 15\vec{p} \times \vec{q} - 4\vec{q} \times \vec{p} - 20\vec{q} \times \vec{q} \\ &= 15\vec{p} \times \vec{q} + 4\vec{p} \times \vec{q} = 19\vec{p} \times \vec{q}.\end{aligned}$$

Nemamo precizno zadane vektore $\vec{p}$ i $\vec{q}$ pa ne možemo odrediti njihov vektorski produkt. No, po definiciji imamo kolika je duljina tog vektora, što je dovoljno da izračunamo površinu paralelograma. Traženo rješenje je

$$P_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = |19\vec{p} \times \vec{q}| = 19\,|\vec{p}|\,|\vec{q}|\sin\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = 19 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 38\sqrt{3}.$$

(b) Imamo površinu paralelograma iz prvog dijela zadatka, a znamo da vrijedi

$$P_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB}\right| v_{AB}.$$

Odredimo još duljinu vektora $\overrightarrow{AB}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (3\vec{p} - 4\vec{q}) \cdot (3\vec{p} - 4\vec{q}) = 9\,|\vec{p}|^2 - 24\vec{p} \cdot \vec{q} + 16\,|\vec{q}|^2 \\ &= 9 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 2^2 = 36 - 48 + 64 = 52.\end{aligned}$$

Korjenovanjem dobivamo $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$. Rješenje je

$$v_{AB} = \frac{P_{ABCD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{38\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{19\sqrt{39}}{13}.$$

□

2.3. Mješoviti produkt

Mješovitim produktom vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nazivat ćemo izraz

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Primijetimo: vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor, a skalarno pomnožen vektorom $\vec{c}$ je broj. Zaključujemo, kao i kod skalarnog produkta, mješoviti produkt je realan broj.

Može se pokazati da za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vrijedi sljedeća formula koju ćemo često koristiti za računanje:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pomoću ove determinante možemo izvesti neka svojstva mješovitog produkta (primjerice, što se dogodi ako zamijenimo dva vektora u redoslijedu i slično), no determinantu reda 3×3 nije teško izračunati pa nije potrebno nabrajati i pamtiti ta svojstva.

Kao što vektorski produkt daje površinu trokuta ili paralelograma, isto tako mješoviti produkt daje volumen tetraedra i paralelepipeda razapetog trima vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Naime, vrijedi

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|, \quad V_P = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

Ovdje treba naglasiti bitnu stvar: izraz ispod apsolutne vrijednosti je broj dobiven kao determinanta matrice tipa 3×3. Od te determinante uzimamo apsolutnu vrijednost jer je volumen pozitivan, a ne negativan broj. Imajmo na umu da, kod tipa zadatka gdje rješenje treba biti pozitivan broj, obavezno treba staviti apsolutnu vrijednost na izračunatu determinantu! Primijetimo: vektorski produkt dvaju vektora jednak je nuli ako i samo ako su ti vektori paralelni. To bi značilo da je površina razapetog trokuta ili paralelograma nula, no paralelni vektori ne razapinju nikakav geometrijski lik, pa u tom slučaju intuicija opravdava rješenje.

Slično vrijedi i za mješoviti produkt! Naime, čim su vektori komplanarni (tj. sva tri se nalaze u istoj ravnini), ne razapinju trodimenzionalno tijelo pa bi volumen trebao biti nula. No, gornja determinanta za komplanarne vektore je također jednaka nuli! Zaključujemo:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ i } \vec{c} \text{ su u istoj ravnini (komplanarni su)} \Longleftrightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0.$$

Zadatak 2.8. Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ i $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$ komplanarni.

Rješenje. Vektori su komplanarni ako je njihov mješoviti produkt jednak 0 pa računamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & 2 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 6\alpha^3 + 4 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha^2 = 6\alpha^3 - 2\alpha + 4.$$

Pitamo se kada je ovaj izraz jednak nuli, tj. kada je $3\alpha^3 - \alpha + 2 = 0$. Bilo bi dobro kada bismo bili u stanju pogoditi neko rješenje kubne jednadžbe. Trik je sljedeći: za bilo koji polinom oblika $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima (tj., $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$) sva rješenja u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ moraju biti oblika $\pm\frac{p}{q}$, pri čemu $p \mid a_0$ te $q \mid a_n$. U našem zadatku mogućnosti su $p = 1, 2$ i $q = 1, 3$ pa su svi kandidati oblika $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$. Uvrštavanjem dobivamo da je izraz jednak nuli za $\alpha_1 = -1$. Sada imamo više načina: možemo dijeliti polinome, koristiti Hornerov algoritam, ili naštimavati:

$$3\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 2\alpha + 2 = 3\alpha^2(\alpha+1) - 3\alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1) = (\alpha+1)\left(3\alpha^2 - 3\alpha + 2\right).$$

Rješenja preostale kvadratne jednadžbe su u skupu kompleksnih brojeva, a mi tražimo samo realna rješenja. Prema tome, dani vektori su komplanarni jedino u slučaju $\alpha = -1$. □

Zadatak 2.9. Odredite $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\alpha\vec{c}$ iznosi $\frac{2}{3}$, pri čemu je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - \frac{1}{3}\vec{k}$,

Rješenje. Odredimo prvo volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\alpha\vec{c}$.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \alpha\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & -\frac{\alpha}{3} \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-\frac{\alpha}{3} - \alpha + \frac{2\alpha}{3} + 2\alpha\right| = \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}|\alpha| = \frac{2|\alpha|}{9}.$$

Primijetimo ovdje da smo, pri računanju determinante, umjesto običnih zagrada stavili apsolutnu vrijednost, u skladu s napomenom – baš zato da bismo dobili pozitivno rješenje! Preostaje još iskoristiti podatak $V = \frac{2}{3}$, iz čega dobivamo dva rješenja: $\alpha = \pm 3$. □

2.4. Pravac

Poznato nam je da je svaki pravac jedinstveno zadan dvjema različitim točkama; geometrijski gledajući, kroz dvije različite točke provučemo liniju koja će predstavljati naš pravac. Recimo da su nam dane točke T_1 i T_2; vektor smjera pravca bit će vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$; naime, $\overline{T_1T_2}$ je dužina koja leži na tom pravcu. Isto vrijedi i ako neku od tih točki zamijenimo bilo kojom drugom točkom s pravca; točnije, taj vektor i vektor $\overrightarrow{T_1T}$ nužno moraju imati isti smjer. Za vektore istoga smjera, budući da su kolinearni, postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\overrightarrow{T_1T} = t\overrightarrow{T_1T_2}.$$

Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ nazivamo *vektor smjera* danog pravca. Ova jednakost nas navodi na jednadžbu pravca s obzirom na proizvoljno danu točku $T = (x, y, z)$, i to, umjesto da je pravac dan dvjema točkama, zadan je jednom točkom $T_1 = (x_0, y_0, z_0)$ i vektorom smjera $\overrightarrow{T_1T_2} = (a, b, c)$. Iz gornje jednadžbe dobivamo

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c),$$

a iz toga

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ta, \\ y - y_0 &= tb, \\ z - z_0 &= tc. \end{aligned}$$

Time dobivamo *parametarsku jednadžbu pravca* koja je oblika

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Uočimo da time dobivamo i $t = \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$, naravno, u slučaju da smijemo dijeliti brojevima a, b i c. Time zapravo dobivamo *kanonsku jednadžbu pravca*:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$

te ćemo u ovom zapisu pisati jednadžbe pravca. Time ćemo dozvoliti da se u nazivniku piše broj 0, što ne znači da time uistinu dijelimo s nulom (naravno, to ne možemo), već će to biti naš dogovorni zapis koji kaže da je koeficijent smjera u toj odgovarajućoj varijabli upravo 0.

Zadatak 2.10. Odredite kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca koji

(a) prolazi točkama $M = (1, 2, -1)$ i $N = (2, 0, 3)$.

(b) je zadan kao presjek ravnina

$$\pi_1 \ldots x - y + z - 4 = 0 \quad \text{i} \quad \pi_2 \ldots 2x + y - 2z + 5 = 0.$$

Rješenje. (a) Treba nam bilo koja točka pravca, ali i vektor smjera. No, njega možemo dobiti pomoću bilo koje dvije točke na pravcu, stoga možemo za vektor smjera uzeti $\overrightarrow{NM} = M - N = (-1, 2, -4)$. Jedan oblik jednadžbe pravca bi bio:

$$\text{kanonski} : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-4},$$

$$\text{parametarski} : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -1 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Probajmo raspisati jednu varijablu pomoću preostalih. Primjerice, zbrajanjem jednadžbi ravnina dobivamo

$$3x - z + 1 = 0 \Longrightarrow z = 3x + 1.$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$y = -2x + 2z - 5 = -2x + 2(3x + 1) - 5 = 4x - 3.$$

Time smo zapravo varijable y i z izrazili preko preostale varijable x. Označimo li $x = t$, upravo smo dobili parametarski oblik jednadžbe pravca:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 4t - 3, \\ z = 3t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Iz ovoga, prebacivanjem slobodnog broja na lijevu stranu jednakosti i dijeljenjem brojem uz parametar t dobivamo i kanonski oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{3}.$$

□

Zadatak 2.11. Zadane su točke $A = (1, 2, 2), B = (3, 1, 2), C = (-1, 5, 2), D = (2, -1, 0)$. Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $T = (1, 2, 3)$ i okomit je na pravce određene vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

Rješenje. Računamo: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{CD} = D - C = (3, -6, -2)$. Uočimo da su pravci okomiti kada su im vektori smjera okomiti! Stoga vektor smjera $\vec{s} = (a, b, c)$ traženog pravca mora biti okomit na vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Iz toga dobivamo:

$$\begin{aligned} 2a - b &= 0, \\ 3a - 6b - 2c &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe imamo $b = 2a$, a onda, uvrštavanjem u drugu, dobivamo $-2c = -3a + 6b = 9a$, odnosno $c = -\frac{9}{2}a$.

Time smo dobili vektor smjera $\vec{s} = \left(a, 2a, -\frac{9}{2}a\right)$; skoro pa smo došli do točnog vektora. No, razmislimo: zapravo nam je svejedno koji broj a se ovdje nalazi! Naime, za vektor je važno samo da određuje pravac, no nije važno i kolike je duljine, odnosno koliko je rastegnut! Primjerice, vektori $(1, 0, 0)$ i $(2, 0, 0)$ predstavljaju isti smjer, baš kao i vektori $(1, 0, -2)$ i $(-2000, 0, 4000)$. Prema tome, parametar a možemo „pokratiti" ili uvrstiti bilo koji broj umjesto njega; mi ćemo uvrstiti $a = 2$ da se riješimo nazivnika, pa time dobivamo

$$\vec{s} = (2, 4, -9).$$

Obzirom da nam je u zadatku dana točka T kroz koju pravac prolazi, traženo rješenje je

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-9}.$$

□

2.5. Ravnina

Analogno kao što je bio slučaj s pravcem, ravninu možemo na jedinstven način odrediti s tri točke koje, osim što moraju biti različite, ne smiju ležati na istom pravcu. Ako su dane tri točke ravnine T_1, T_2 i T_3, pitamo se kako odrediti bilo koju drugu točku ravnine T. Slično kao kod pravca i kolinearnosti, primjećujemo da vektori $\overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}$ i $\overrightarrow{TT_1}$ leže u istoj ravnini, odnosno *komplanarni su.* Ti vektori ne razapinju nikakav paralelepiped; točnije, razapinju onaj degenerični s volumenom jednakim nuli. Formulu za volumen znamo pomoću mješovitog produkta:

$$\overrightarrow{TT_1} \cdot \left(\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}\right) = 0.$$

Kada bismo imali zadane točke kao $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$ i $T_3 = (x_3, y_3, z_3)$ te je točka $T = (x, y, z)$ s ravnine proizvoljna, formulu bismo imali direktno iz definicije mješovitog produkta:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

No ravnine ćemo zadavati na nešto drugačiji način, i to s dvije komponente umjesto s jednom.

Vektor $\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3}$ je neki vektor okomit na pravce na kojima leže vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$, a samim time okomit je i na cijelu ravninu; takav vektor zvat ćemo *normala ravnine.* Označimo koordinate tog vektora sa $\vec{n} := \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3} = (A, B, C)$, $T_1 = (x_0, y_0, z_0)$ i $T = (x, y, z)$. Dobivamo

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) &= 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) &= 0 \\ Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 &= 0. \end{aligned}$$

Često ćemo jednadžbu zadavati u posljednjem, općem obliku, koji uz oznaku $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ postaje

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

no imamo na umu i oblik iz predzadnjeg reda gornjeg raspisa, dan pomoću dvije komponente: točke s ravnine (x_0, y_0, z_0) i vektora normale (tj. bilo kojeg vektora okomitog na ravninu) (A, B, C):

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Zadatak 2.12. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T_0 = (2, -1, 3)$ i

(a) na koordinatnim osima odsijeca iste odsječke $a \neq 0$.

(b) sadrži x-os.

Rješenje. (a) Ovaj podatak zapravo daje još tri točke kroz koje dani pravac prolazi: $(a, 0, 0), (0, a, 0)$ i $(0, 0, a)$. Vektori koji se nalaze u toj ravnini su $(a, 0, 0) - (0, a, 0) = (a, -a, 0)$ i $(a, 0, 0) - (0, 0, a) = (a, 0, -a)$, stoga je jedna normala te ravnine

$$(a, -a, 0) \times (a, 0, -a) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix} = a^2\,\vec{i} + a^2\,\vec{j} + a^2\,\vec{k} = a^2(1, 1, 1).$$

S obzirom da vektor normale možemo mijenjati do na množenje skalarom koji je različit od nule, a ovo nam je dobra prilika da se riješimo suvišnog parametra $a \neq 0$ (po pretpostavci), uzet ćemo $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Time dobivamo jednadžbu:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 3) &= 0 \\ x + y + z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Dodatni komentar: da smo ustrajali na zadržavanju gornjeg skalara a^2 i uzeli $\vec{n} = \left(a^2, a^2, a^2\right)$, dobili bismo jednadžbu ravnine

$$a^2x + a^2y + a^2z - 4a^2 = 0.$$

Očekivano, tu jednadžbu bismo dijelili sa a^2. Srećom, to smijemo raditi jer smo pretpostavili da je $a \neq 0$ (da je bilo $a = 0$, ne bismo imali 4 zadane točke nego samo dvije, a time i nedovoljan broj podataka za određivanje ravnine).

(b) Opet, dovoljno je odrediti bilo koje dodatne dvije točke kako bismo na sličan način odredili vektor normale, a nama je dan cijeli pravac. Pravac x-osi sadrži sve točke oblika $(x, 0, 0)$ za $x \in \mathbb{R}$, pa uzmimo, recimo, $(0, 0, 0)$ i $(1, 0, 0)$. Slijedi

$$\vec{n} = (1, 0, 0) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - \vec{k} = (0, -3, -1).$$

Tražena jednadžba ravnine je $0 \cdot (x - 0) - 3 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0$, odnosno $-3y - z = 0$.

□

Promotrimo pravce p_1 i p_2 te im označimo vektore smjera s, redom, $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$. Kako pravce zapravo poistovjećujemo s pojmom „smjer”, uočavamo da vrijedi sljedeće.

1. Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\vec{s_1} = t\vec{s_2}$ (tj. vektori smjera su kolinearni).

2. Pravci p_1 i p_2 su okomiti ako i samo ako su vektori $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$ okomiti.

Paralelni pravci se mogu podudarati, ali vrijedi i dodatna stvar: okomiti pravci se ne moraju nužno sijeći - mogu biti mimoilazni! Ovo je bitna razlika s obzirom na to da je u dvije dimenzije sijecanje okomitih pravaca bilo neizbježno.

Uzmimo sada dvije ravnine π_1 i π_2 te njihove vektore normale, redom, $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$. Iako je vektor normale okomit na pripadnu ravninu π_1, i dalje vrijedi slični odnos kao i za pravce!

1. Ravnine π_1 i π_2 su paralelne ako i samo ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\vec{n_1} = t\vec{n_2}$ (tj. vektori normala su kolinearni).

2. Ravnine π_1 i π_2 su okomite ako i samo ako su vektori $\vec{n_1}$ i $\vec{n_2}$ okomiti.

Nešto možemo reći i o odnosu pravca p s vektorom smjera $\vec{s}$ i ravnine π s vektorom normale $\vec{n}$, no tu nailazimo na suprotne odnose!

1. Pravac p i ravnina π su paralelni ako i samo su vektori $\vec{s}$ i $\vec{n}$ okomiti.

2. Pravac p i ravnina π su okomiti ako i samo ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\vec{s} = t\vec{n}$ (tj. ti vektori su kolinearni).

Iz ovoga pamtimo: objekti istog tipa (pravac–pravac i ravnina–ravnina) su u istom odnosu kao i pripadni vektori (smjerova ili normala), dok objekti različitog tipa (pravac i ravnina) imaju suprotne odnose pripadnih vektora (smjera i normale).

Štoviše, imamo i formule za kut između pravaca i ravnina!

1. Kut između pravca p_1 s vektorom smjera $\vec{s_1}$ i pravca p_2 s vektorom smjera $\vec{s_2}$ zadovoljava
$$\cos\measuredangle(p_1, p_2) = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\,|\vec{s_2}|}.$$

2. Kut između ravnine π_1 s vektorom normale $\vec{n_1}$ i ravnine π_2 s vektorom normale $\vec{n_2}$ zadovoljava
$$\cos\measuredangle(\pi_1, \pi_1) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}.$$

3. Kut između pravca p s vektorom smjera $\vec{s_1}$ i ravnine π s vektorom normale $\vec{n}$ zadovoljava
$$\sin\measuredangle(p, \pi) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}.$$

Formule su pretežno iste, izuzev posljednje gdje umjesto kosinusa dolazi sinus. To možemo povezati s ranije spomenutim suprotnim odnosom „suprotnih objekata", pravca i ravnine.

Zadatak 2.13. Odredite jednadžbu ravnine π_0 koja prolazi točkom $M = (2, -1-1)$ i okomita je na ravnine
$$\pi_1 \ldots 3x + 2y - z - 4 = 0,$$
$$\pi_2 \ldots x + y + z - 3 = 0.$$

Rješenje. Vektori normala danih ravnina su, redom, $\vec{n_1} = (3, 2, -1)$ i $\vec{n_2} = (1, 1, 1)$. Ravnina π_0 okomita je na obje ravnine, pa je i njen vektor normale $\vec{n}$ okomit na obje normale. Zbog toga uzimamo
$$\vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} = (3, -4, 1).$$

Tražena jednadžba je $3(x-2) - 4(y+1) + (z+1) = 0$, odnosno $3x - 4y + z - 9 = 0$. $\square$

Zadatak 2.14. Odredite ortogonalnu projekciju N točke $M = (-1, 0, 1)$ na ravninu $\pi \dots 2x + y - z = 0$.

Rješenje. Ortogonalna projekcija N je točka dobivena spuštanjem okomice iz točke M na ravninu π. To je ujedno i točka ravnine najbliža točki M; pomoću nje možemo izračunati udaljenost točke M od ravnine π.

Primijetimo da se točke M i N nalaze na pravcu p okomitom na ravninu π, što znači da je njegov vektor smjera kolinearan s vektorom normale ravnine π. Štoviše, možemo uzeti da su ti vektori isti, pa stavljamo $\vec{s} = \vec{n} = (2, 1, -1)$. Time smo dobili parametarski zapis jednadžbe pravca p:

$$p \dots \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 1 - t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

No, primijetimo da je točka N zapravo sjecište pravca p i ravnine π! Parametarski zapis pravca nam odgovara kako bismo mogli uvrstiti dobiveno u jednadžbu ravnine π:

$$\begin{aligned} 2(-1 + 2t) + t - (1 - t) &= 0 \\ 6t &= 3 \\ t &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zaključujemo, točku N dobivamo pomakom od točke M s istom orijentacijom kao i vektor $\vec{s}$ za $\frac{1}{2}$ tog smjera. Odnosno, uvrštavamo u gornju jednadžbu pravca i dobivamo $x = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0, y = \frac{1}{2}, z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Tražena projekcija je $N = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $\square$

Zadatak 2.15. Odredite točku T' s pravca

$$p \dots \frac{x - 4}{1} = \frac{y - 6}{2} = \frac{z + 1}{-1}$$

koja je najbliža točki $T = (4, 4, 5)$.

Rješenje. Točka T' je ortogonalna projekcija točke T na pravac p. Ovdje nije dovoljno uzeti pravac okomit na pravac p koji sadrži točku T'; takav pravac nije jedinstveno određen i može se dogoditi da na taj način odaberemo pravac koji se mimoilazi s p. Idemo drugim pristupom: tražimo ravninu π koja je okomita na pravac p, a sadrži točku T! Za nju znamo da će probadati pravac p u točno jednoj točki, a to će upravo biti tražena točka T'. Naime, pravac koji sadrži točke T i T' nalazi se u ravnini π, pa je time okomit na pravac p.

Za ravninu π uzimamo vektor normale $\vec{n} = (1, 2, -1)$ koji je zapravo vektor smjera pravca p budući da želimo da ravnina π bude okomita na pravac p. S obzirom na to da ona sadrži točku T, imamo njenu jednadžbu:

$$\begin{aligned} (x - 4) + 2(y - 4) - (z - 5) &= 0, \\ \pi \dots x + 2y - z - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Točka T' je sjecište ravnine π i pravca p kojeg ćemo zapisati parametarski:

$$p \dots \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

To uvrštavamo u jednadžbu ravnine π i dobivamo $4 + t + 2(6 + 2t) - (-1 - t) - 7 = 0$, a iz toga $t = -\frac{5}{3}$. Tražena točka je $T' = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$. □

Zadatak 2.16. Odredite ravninu π okomitu na y-os i koja prolazi sjecištem pravaca

$$p_1 \ldots \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1},$$
$$p_2 \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Rješenje. Vektor normale ravnine π paralelan je s vektorom smjera y-osi pa možemo uzeti $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Sjecište pravaca pronaći ćemo pomoću parametarskog zapisa.

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 1, \\ y = -2 + 3t, \\ z = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad p_2 \ldots \begin{cases} x = 5 + 2s, \\ y = s, \\ z = 1 + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Naravno, tu pazimo da svaki pravac ima svoj realni parametar, tj. ne pišemo istu oznaku za parametre. Točka sjecišta pravaca mora zadovoljavati

$$\begin{aligned} 1 &= 5 + 2s, \\ -2 + 3t &= s, \\ -1 - t &= 1 + s. \end{aligned}$$

Iz ovoga dobivamo $s = -2$ i $t = 0$. (Uočimo: da se slučajno dogodilo da ovaj sustav nema rješenja, to bi značilo da se pravci p_1 i p_2 ne sijeku!) Uvrstimo li t u prvi zapis ili s u drugi, dobit ćemo traženu točku: $(1, -2, -1)$. Prema tome, tražena ravnina je oblika $0 \cdot (x - 1) + y + 2 + 0 \cdot (z + 1) = 0$. odnosno $y + 2 = 0$. □

Zadatak 2.17. Vrhovi trokuta su $A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 3)$ i $C = (-2, 1, 1)$. Je li trokut ΔABC jednakokračan? A jednakostraničan?

Rješenje. Dovoljno je odrediti veličine sva tri kuta u trokutu i vidjeti koliko njih je međusobno jednako. Primijetimo da je $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 2), \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 0)$ i $\overrightarrow{BC} = (-5, 1, -2)$, a time imamo i suprotne vektore $\overrightarrow{BA} = (-2, 1, -2), \overrightarrow{CA} = (3, 0, 0)$ i $\overrightarrow{CB} = (5, -1, 2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \cos\measuredangle BAC &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2}} \\ &= \frac{-6}{3 \cdot 3} = -\frac{2}{3}, \\ \cos\measuredangle ABC &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{15}{3 \cdot \sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{6}, \\ \cos\measuredangle ACB &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{15}{3 \cdot \sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{6}. \end{aligned}$$

Budući da je kosinus kao funkcija sa $[0,\pi]$ na $[-1,1]$ bijekcija, možemo zaključiti da su kutevi $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle ACB$ isti, ali se razlikuju od kuta $\measuredangle BAC$. Prema tome, trokut ΔABC je jednakokračan s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, ali nije jednakostraničan. $\square$

Poglavlje 3

Analiza

Glavni objekt koji ćemo proučavati u ovom poglavlju su funkcije. Obično ih označavamo malim slovom i shvaćamo ih kao neko pravilo pridruživanja brojeva: broju x pridružujemo odgovarajuću vrijednost y, koju ćemo sada označavati sa $f(x)$ za neku funkciju koja se zove f. Do sada smo u koordinatnoj ravnini crtali određene krivulje (pravce, kružnice, elipse, ...) koje su bile dane formulama u ovisnosti o varijablama x i y; sada ćemo govoriti o *grafu funkcije* f gdje ćemo za broj x na osi ordinata označavati pripadnu vrijednost $f(x)$.

Primjećujemo da funkciju moramo nekako zadati tako da se točno zna, za svaki broj x, koju vrijednost $f(x)$ ćemo uzeti. Pritom je bitno znati odakle točno uzimamo broj x te koje su sve moguće vrijednosti oblika $f(x)$. Precizna matematička definicija glasi ovako:

Definicija 3.1. Funkcija f sa skupa X u skup Y je bilo koji podskup Kartezijevog produkta $f \subseteq X \times Y$ takav da za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni $y \in Y$ takav da vrijedi $(x, y) \in f$. U tom slučaju funkciju f s domenom X i kodomenom Y označavamo sa $f : X \to Y$ te uvodimo oznaku $f(x) := y$.

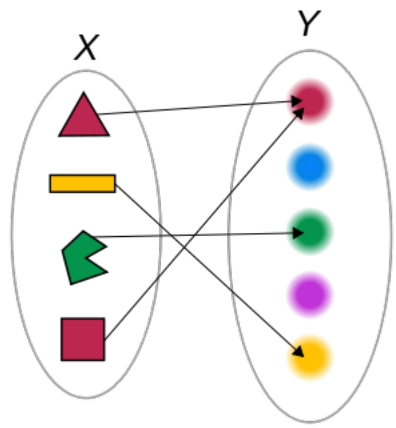
Primijetimo da je po ovome funkcija zadana pomoću tri komponente:

- **pravilom pridruživanja**, što najčešće shvaćamo kao formulu funkcije; u ovoj definiciji to je skup uređenih parova f,

- **domenom funkcije**, što je skup vrijednosti x kojima pridružujemo; po ovoj definiciji to je skup X,

- **kodomenom funkcije**, što je skup vrijednosti koji će biti pridruženi nekom x-u; po ovoj definiciji to je skup Y.

Primijetimo da u ovom slučaju skupovi X i Y mogu biti doslovno bilo što, pa tako i samo pridruživanje f! Recimo, možemo uzeti da je X skup nekih obojenih mnogokuta, a skup Y skup nekih boja. Tada za funkciju f možemo uzeti, recimo, po pravilu da svakom mnogokutu pridruži njegovu boju, kao na sljedećoj slici.



To je dobro definirana funkcija jer, osim zadanih skupova X i Y, svakom mnogokutu uistinu je pridružena točno jedna boja. Uočimo da u ovom primjeru nismo iskoristili sve moguće boje, kao i da postoji više mnogokuta koji su obojeni istom bojom. Dakle, svaki element iz X mora dobiti točno jednu pridruženu vrijednost (ovdje točno jednu boju), dok neki elementi iz Y ne moraju biti pogođeni niti jednom, a neki mogu biti pogođeni i više puta.

Mi ćemo se ipak baviti nešto konkretnijim funkcijama; skupovi X i Y bit će podskupovi skupa realnih brojeva, tj. $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, a funkciju f nećemo označavati strelicama ili točku po točku, nego eksplicitnom formulom.

Primjer 3.2.

- Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa $f(x) := x^2 - 4$ je dobro zadana funkcija: svakom realnom broju $x \in \mathbb{R}$ pridružen je jedinstveni broj $x^2 - 4$ koji je element kodomene, u ovom slučaju $\mathbb{R}$. Primjerice, broju $0 \in \mathbb{R}$ je pridružena vrijednost $f(0) = -4 \in \mathbb{R}$.

- Stavimo li $g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ te $g(x) := x^2 - 4$, također dobivamo dobro zadanu funkciju. Primijetimo da f i g nisu iste funkcije, tj. $f \neq g$; naime, iako imaju potpuno isto pravilo pridruživanja, imaju različite domene! Domena funkcije f je $\mathbb{R}$, a domena funkcije g je $[0, +\infty\rangle$. Tako je recimo $f(-1) = -3$, ali $g(-1)$ nije definirano.

- Sa $h : [1, 2] \to [-3, 0]$ i $h(x) := x^2 - 4$ također smo dobro zadali funkciju. Naime, $x \in [1, 2] \Leftrightarrow x^2 \in [1, 4] \Leftrightarrow x^2 - 4 \in [-3, 0]$, stoga je svakom broju $x \in [1, 2]$ uistinu pridružen neki broj iz kodomene $[-3, 0]$. Uočimo, $f \neq h$ i $g \neq h$.

- Stavimo $l : [1, 2] \to \{0\}, l(x) := x^2 - 4$. Ovo nije dobro zadana funkcija! Naime, iako imamo zadano pravilo pridruživanja, problem je što broj $l(x)$ ne pripada kodomeni funkcije za sve x-eve iz domene; konkretno, $l(1) = -3 \notin \{0\}$. U odnosu na prethodnu funkciju h, ovdje smo pogriješili što smo previše suzili potencijalnu kodomenu (zapravo, u raspisu za funkciju h možemo primijetiti da ne smijemo više smanjivati skup $[-3, 0]$).

Često ćemo zadati funkciju samo po pravilu pridruživanja, time pretpostavljajući što bi bila njena domena i kodomena. Po prethodnim primjerima možemo primijetiti da za domenu funkcije imamo više izbora; nas će ipak zanimati **najveći mogući skup za koji funkcija ima smisla**. Primjerice, imamo (dobro zadanu) funkciju $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ danu pravilom $f(x) = \dfrac{1}{x}$, međutim jasno nam je kako smo za domenu mogli uzeti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, budući da je dijeljenje dozvoljeno s bilo kojim realnim brojem izuzev nule. Takav skup nazivat ćemo **prirodnom domenom** funkcije f i označavati sa $\mathcal{D}_f$.

Tipovi funkcija.

1. Polinomi. To su funkcije oblika $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, pri čemu uzimamo $a_n \neq 0$ kako bismo mogli reći da je riječ o polinomu n-tog stupnja. Ovaj izraz ima smisla za sve realne brojeve x, stoga je u ovom slučaju $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Racionalne funkcije. Riječ je o funkcijama oblika $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pri čemu su P i Q polinomi. Budući da ne smijemo dijeliti nulom, slijedi $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

3. Iracionalne funkcije. To su funkcije oblika $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, pri čemu je P polinom, a $n \in \mathbb{N}$. Budući da parna potencija nekog broja može biti samo pozitivan broj ili nula, a neparna potencija nekog broja bilo što, za domenu n-tog korijena slijedi

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbb{R}, & n \text{ je neparan broj}, \\ \{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}, & n \text{ je paran broj}. \end{cases}$$

Zadatak 3.1. Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija.

(a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{-x + 3}}$,

(b) $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{x - 1}{(2 - x)(x - 3)}}$,

(c) $f(x) = \sqrt[4]{|3 + x - x^2| - 3}$.

Rješenje. (a) Moramo paziti da ne dijelimo s nulom, kao i što se nalazi pod parnim korijenom. U ovom slučaju imamo dva uvjeta:

1. $-x + 3 \neq 0$,
2. $\dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{-x + 3} \geq 0$.

Prvi uvjet daje jednostavan odgovor: $x \neq 3$. U drugom slučaju htjeli bismo napraviti tablicu predznaka, a za to je dobro faktorizirati izraz u brojniku. Tu će nam pomoći trik iz zadatka 2.8: tražimo kandidata za nultočku brojnika, a mogućnosti su $\pm 1, \pm 3$. Uvrštavanjem uočimo da je $x = 1$ nultočka, pa faktoriziramo:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x - 3 &= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 = x^2(x - 1) + 2x(x - 1) + 3(x - 1) \\ &= (x - 1)\left(x^2 + 2x + 3\right). \end{aligned}$$

Preostalom izrazu tražimo nultočke pomoću standardne formule. No, kako je diskriminanta kvadratne jednadžbe negativan broj, dobili smo da taj izraz nema nultočki. S obzirom na to da je vodeći koeficijent uz x^2 pozitivan, za cijeli izraz vrijedi $x^2 + 2x + 3 > 0$ i to za sve $x \in \mathbb{R}$. Preostaje napraviti tablicu predznaka:

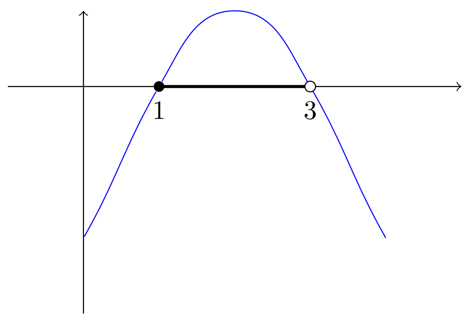
	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$-x + 3$	+	+	-	
$x - 1$	-	+	+	
$\dfrac{(x-1)(x^2+2x+3)}{-x+3}$	-	+	-	

Međutim, umjesto tablice predznaka mogli smo još jednostavnije! Uočimo da vrijedi

$$\frac{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{-x+3} \geq 0 \;\Big/ \cdot(-x+3)^2 \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+3\right)(-x+3) \geq 0,\ -x+3 \neq 0.$$

Naime, općenito je nejednadžbe zabranjeno množiti izrazima za koje nismo sigurni kakvog su predznaka, primjerice izrazima koje ovise o nepoznanici x. Međutim, znamo da vrijedi $(-x+3)^2 \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, a množenjem nenegativnim brojem ne mijenja se znak nejednakosti. Potrebno je jedino imati na umu da promijenjena nejednadžba ostaje ista tek uz uvjet $-x+3 \neq 0$ jer, umjesto mogućeg dijeljenja s nulom za $x=3$, sada bi to bilo uključeno rješenje nove nejednadžbe $(x-1)\left(x^2+2x+3\right)(-x+3) \geq 0$ pa bismo time nedozvoljeno proširili traženi skup rješenja.

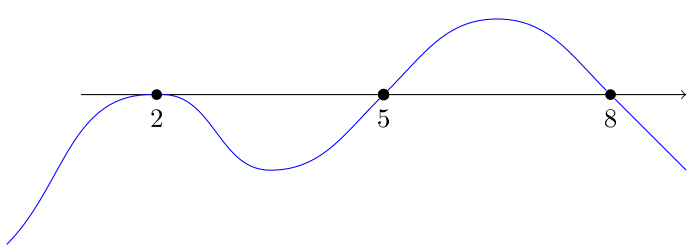
No, što smo ovime dobili? Pitanje se svodi na to za koje x-eve je polinom 4. stupnja $(x-1)\left(x^2+2x+3\right)(-x+3)$ pozitivan. Budući da smo primijetili da je $\left(x^2+2x+3\right) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, dovoljno je odrediti kada je $(x-1)(-x+3) \geq 0$. Tu nam je ključno znati da su realne nultočke tog polinoma $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$, kao i da je vodeći koeficijent negativan (točnije, jednak je -1). U mogućnosti smo odokativno skicirati graf promatrane krivulje (vodeći koeficijent je negativan pa je krivulja okrenuta „prema dolje"):



Primjećujemo, naš uvjet vrijedi kada je $x \in [1,3\rangle$ (ne zaboravimo izbaciti uvjet iz nazivnika!).

Konačno rješenje je presjek obaju uvjeta, prema tome $\mathcal{D}_f = [1,3\rangle$.

Kako bismo skicirali krivulju polinoma većeg stupnja? Prvo moramo faktorizirati polinom, primjerice $(-x+5)^5(x-8)^{23}(x-2)^8 \geq 0$. Budući da je vodeći koeficijent negativan (promatramo parnost potencije: $(-1)^5(1)^{23}(1)^8 = -1$), graf krećemo crtati odozdo (inače, da je vodeći koeficijent bio pozitivan, kretali bi odozgo). Kada naiđemo na nultočku polinoma, ako je to nultočka parne kratnosti (odnosno, faktor kojemu je to nultočka ima paran eksponent), onda krivulja ne mijenja predznak, a ako je nultočka neparne kratnosti, krivulja mijenja predznak (odnosno prolazi kroz nju). Rezultat se vidi na sljedećoj skici:



(b) Budući da ispod neparnog korijena može biti bilo što, ovdje imamo samo uvjet nazivnika: $(2-x)(x-3) \neq 0$. Odnosno $x \neq 2$ i $x \neq 3$. Traženo rješenje je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

(c) Jedini uvjet koji imamo, zbog parnog korijena, je $\left|3 + x - x^2\right| - 3 \geq 0$, odnosno $\left|3 + x - x^2\right| \geq 3$. Potrebno je na dva slučaja razdvojiti apsolutnu vrijednost; prisjetimo se pritom, ako je izraz ispod apsolutne vrijednosti pozitivan, izraz se uopće ne mijenja, a ako je negativan mijenjamo predznak svemu što je unutra.

1. $3 + x - x^2 \geq 3$, uz uvjet $3 + x - x^2 \geq 0$,
2. $-3 - x + x^2 \geq 3$, uz uvjet $3 + x - x^2 < 0$.

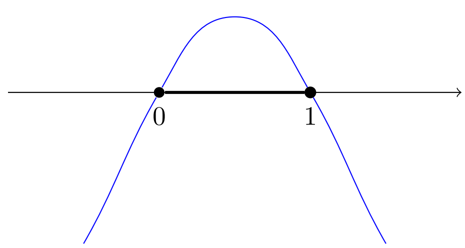
U svakom od ova dva slučaja rješenje će biti ono što raspišemo iz nejednakosti u presjeku s naznačenim uvjetom. Primijetimo da je u prvom slučaju dovoljno da raspišemo samo $3 + x - x^2 \geq 3$; naime, za sve x-eve za koje je izraz $3 + x - x^2$ veći ili jednak od 3 je sigurno i nenegativan. Slično, iz drugog slučaja imamo nejednakost (pomnoženu s -1) oblika $3 + x - x^2 \leq -3$ pa je svakako taj izraz i negativan. Stoga je za ubuduće dovoljno ostaviti apsolutnu vrijednost na jednoj strani nejednakosti i pisati uvjete:

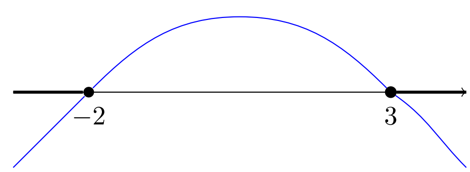
1. $3 + x - x^2 \geq 3$, ili
2. $3 + x - x^2 \leq -3$.

(Primijetite da između ta dva uvijeta stoji veznik *ili*, odnosno treba vrijediti barem jedan od ta dva uvjeta da bi vrijedilo $\left|3 + x - x^2\right| - 3 \geq 0$. Konačno rješenje je tada unija rješenja dobivenih za svaki poduvjet. Da smo imali uvjet $\left|x^2 + x\right| < 2$, tada bi njega rastavili na $x^2 + x < 2$ *i* $x^2 + x > 2$ pa bi konačno rješenje bilo presjek rješenja za svaki od poduvjeta.)

Raspišimo dane uvjete:

$$\begin{aligned} 3 + x - x^2 &\geq 3 \\ x - x^2 &\geq 0 \\ x(1-x) &\geq 0. \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} 3 + x - x^2 &\leq -3 \\ -x^2 + x + 6 &\leq 0 \\ -(x+2)(x-3) &\leq 0. \end{aligned}$$

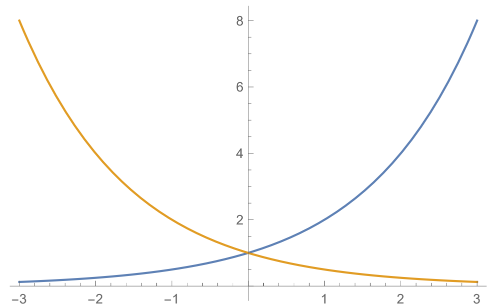




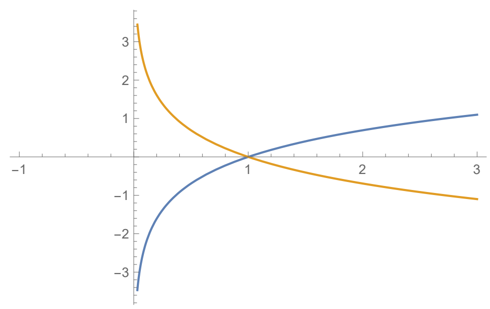
Dakle, nejednakost $3+x-x^2 \geq 3$ je zadovoljena za svaki $x \in [0, 1]$ (budući da je na tom intervalu funkcijska vrijednost veća ili jednaka od nule), a nejednakost $3 + x - x^2 \leq -3$ za $x \in \langle -\infty, -2] \cup [3, +\infty\rangle$ (jer za te vrijednosti od x je funkcijska vrijednost manja ili jednaka od nule).

Budući da smo s apsolutnom vrijednošću promatrali dva potpuno odvojena (disjunktna) slučaja (odnosno treba nam vrijediti *ili* jedan *ili* drugi slučaj), konačno rješenje bit će unija rješenja po slučajevima. Prema tome, $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -2] \cup [0, 1] \cup [3, +\infty\rangle$. $\square$

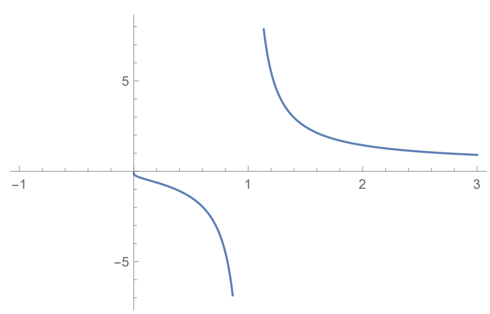
4. Eksponencijalne funkcije. To su funkcije oblika $f(x) = a^x$, pri čemu je $a > 0$, $a \neq 1$ neka unaprijed zadana fiksna konstanta. Znamo da je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, međutim, eksponencijalna funkcija može imati jedno od dva različita ponašanja: ako je $a > 1$ (plavi graf), funkcija f je rastuća, a ako je $0 < a < 1$, funkcija f je padajuća (narančasti graf).



5. Logaritamske funkcije. Stavljamo $f(x) = \log_b x$, pri čemu je $b > 0$, $b \neq 1$; isto kao i kod eksponencijalnih funkcija. S obzirom na to da je logaritamska funkcija „suprotna” od eksponencijalne, njena domena će biti skup svih vrijednosti koje eksponencijalna funkcija može pogoditi, a to je $\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty\rangle$. Također su moguća dva različita oblika ponašanja: rast ako je $b > 1$ (plavi graf), odnosno pad ako je $0 < b < 1$ (narančasti graf).



Ponekad ćemo imati varijablu unutar baze logaritma, stoga je dobro posebno promotriti funkciju oblika $f(x) = \log_x a$ za neki fiksni broj $a > 0$. U tom slučaju je $\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$. Za konstantu $a = e$ graf bi izgledao ovako:



Zadatak 3.2. Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija.

(a) $f(x) = \log\left(\left|\dfrac{5x+2}{2x-3}\right| - 3\right)$, (b) $f(x) = \dfrac{\log_x(e^x - 2)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

(c) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$, (d) $f(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x+6}{2x-3}\right)\right]^{-\frac{2}{3}}$.

Rješenje. (a) Dva su uvjeta:

1. $2x - 3 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$,
2. $\left|\dfrac{5x+2}{2x-3}\right| - 3 > 0 \Longleftrightarrow \left|\dfrac{5x+2}{2x-3}\right| > 3$.

   Uklanjanjem apsolutne vrijednosti dobivamo dva slučaja:

$$\begin{aligned} \frac{5x+2}{2x-3} &> 3 \\ \frac{5x+2}{2x-3} - 3 &> 0 \\ \frac{5x+2-3(2x-3)}{2x-3} &> 0 \\ \frac{5x+2-6x+9}{2x-3} &> 0 \\ \frac{-x+11}{2x-3} &> 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{5x+2}{2x-3} &< -3 \\ \frac{5x+2}{2x-3} + 3 &< 0 \\ \frac{5x+2+3(2x-3)}{2x-3} &< 0 \\ \frac{5x+2+6x-9}{2x-3} &< 0 \\ \frac{11x-7}{2x-3} &< 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$ do $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ do 11	11 do $+\infty$
$-x+11$	+	+	-
$2x-3$	-	+	+
$\frac{-x+11}{2x-3}$	-	+	-

$$\Longrightarrow x \in \left\langle \frac{3}{2}, 11 \right\rangle$$

	$-\infty$ do $\frac{7}{11}$	$\frac{7}{11}$ do $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ do $+\infty$
$11x-7$	-	+	+
$2x-3$	-	-	+
$\frac{11x-7}{2x-3}$	+	-	+

$$\Longrightarrow x \in \left\langle \frac{7}{11}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

Konačno rješenje je $\mathcal{D}_f = \left\langle \dfrac{7}{11}, \dfrac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{3}{2}, 11 \right\rangle = \left\langle \dfrac{7}{11}, 11 \right\rangle \setminus \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$.

(b) Četiri su uvjeta:

1. $x > 0$, $x \neq 1$,
2. $e^x - 2 > 0$,
3. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$,
4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \neq 0$.

Prvi uvjet je već raspisan. Promotrimo drugi uvjet:

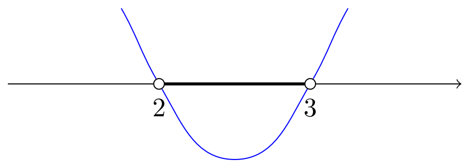
$$e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 2 \;/\ln \Longleftrightarrow x > \ln 2$$

U posljednjem koraku računamo na to da su eksponencijalna i logaritamska funkcija s istom bazom „suprotne” pa je prirodno na eksponencijalnu funkciju djelovati logaritamskom (i obratno). Tu moramo paziti je li odgovarajuća funkcija rastuća ili padajuća jer to može utjecati na znak nejednakosti. Budući da je $e > 1$, znak nejednakosti ostaje isti.

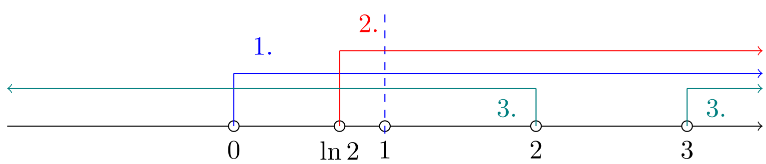
Preostala dva slučaja možemo objediniti zajedno pa računamo

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Nultočke ovog polinoma su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$, a skiciranjem polinoma drugog stupnja dobivamo da je $x \in \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.



Konačno rješenje je presjek svih slučajeva, odnosno presjek svih uvjeta na x koje smo dobili. Budući da ih ima više te je nezgodno direktno iščitati koji bi skup to bio, dobro je poslužiti se skicom na pravcu realnih brojeva kako bismo si predočili konačno rješenje:



Iz ovoga vidimo da je $\mathcal{D}_f = \langle \ln 2, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle = (\langle \ln 2, 2\rangle \setminus \{1\}) \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

(c) Uvjeti su:

1. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 0$,
2. $x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Iz prvog slučaja, djelovanjem suprotne eksponencijalne funkcije s bazom $\dfrac{1}{3}$ te pazeći pritom na znak nejednakosti, dobivamo $x - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1 \iff x \leq 2$. Time su nam oba slučaja povezana i dobili smo da mora vrijediti

$$1 < x \leq 2.$$

Prema tome, $\mathcal{D}_f = \langle 1, 2]$.

(d) Prije svega, potrebno je razumjeti ulogu eksponenta $-\dfrac{2}{3}$. Vrijedi $x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Prema tome, jedino treba paziti da izraz ispod negativnog eksponenta nije jednak nuli (minus predznak prebacuje izraz u nazivnik razlomka). Dodatno, trebalo bi provjeriti je li u pitanju parni korijen nečega što bi moglo biti negativno, no to kod nas nije slučaj jer imamo neparni (treći) korijen. Stoga su naši uvjeti:

1. $2x - 3 \neq 0$,
2. $\dfrac{x+6}{2x-3} > 0$,

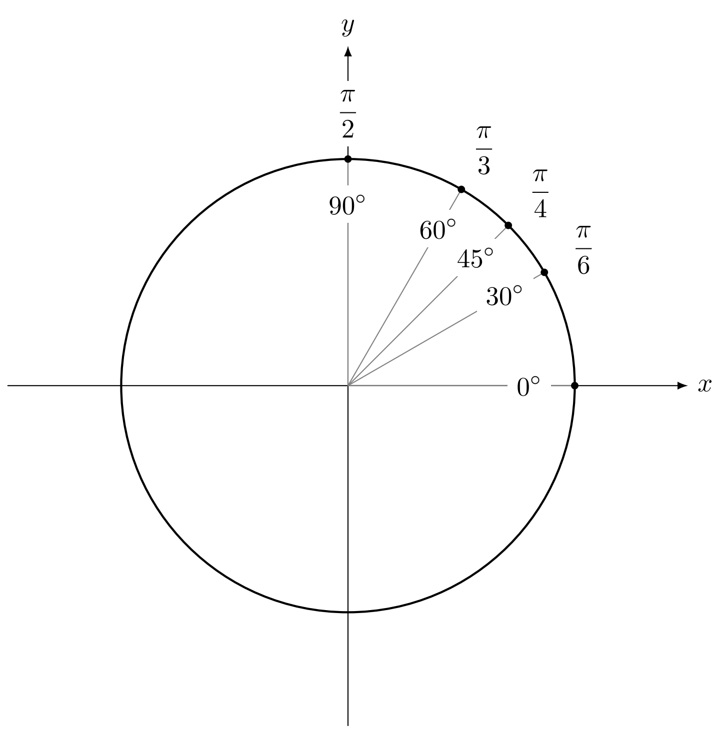
3. $\ln\left(\dfrac{x+6}{2x-3}\right) \neq 0$.

Prvi slučaj je jednostavan: $x \neq \dfrac{3}{2}$. Slučaj 2. vrijedi kada je $x \in \langle -\infty, -6\rangle \cup \left\langle \dfrac{3}{2}, +\infty \right\rangle$. Iz slučaja 3. dobivamo $\ln\left(\dfrac{x+6}{2x-3}\right) \neq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x+6}{2x-3} \neq 1 \Longleftrightarrow x+6 \neq 2x-3 \Longleftrightarrow x \neq 9$; prekriženu jednakost mogli smo množiti izrazom ovisnim o varijabli x jer je uloga ista kao i kod jednakosti (gledamo kada se *ne* postiže jednakost). Rješenje je $\mathcal{D}_f = \left(\langle -\infty, -6\rangle \cup \left\langle \dfrac{3}{2}, +\infty \right\rangle\right) \setminus \{9\}$. □

6. <u>Trigonometrijske funkcije.</u> Četiri su osnovne trigonometrijske funkcije, navedene u sljedećoj tablici sa svojim prirodnim domenama.

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Trigonometrijske vrijednosti određujemo pomoću brojevne kružnice radijusa 1 (odnosno, jedinične kružnice). Dovoljno je znati tablične vrijednosti trigonometrijskih funkcija u prvome kvadrantu (za višekratnike tih kuteva vrijednosti trigonometrijskih funkcija dobivamo pomoću preslikavanja preko osi apscisa ili osi ordinata).



x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
0	0	1	0	nije def.
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	nije def.	0

Zadatak 3.3. Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija.

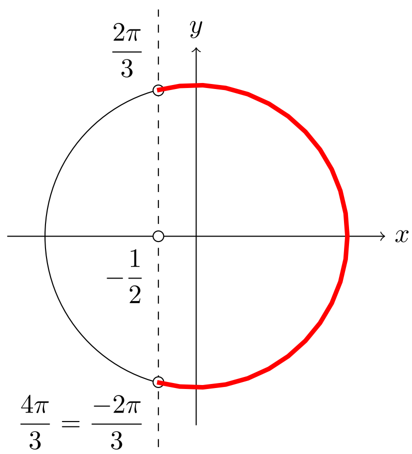
(a) $f(x) = \ln\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)$,

(b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} + \log(\sin(x-3))$,

(c) $f(x) = \sqrt[6]{\operatorname{ctg}(x+5)}$,

(d) $f(x) = \log_{\operatorname{tg} x} \sin x$.

Rješenje. (a) Samo je jedan uvjet: $\cos x + \frac{1}{2} > 0$, odnosno $\cos x > -\frac{1}{2}$. Nejednakosti s trigonometrijskim funkcijama rješavamo pomoću brojevne kružnice; označimo točke u kojima je kosinus jednak $-\frac{1}{2}$ te po x-osi pratimo koje točke s brojevne kružnice imaju veću vrijednost kosinusa.

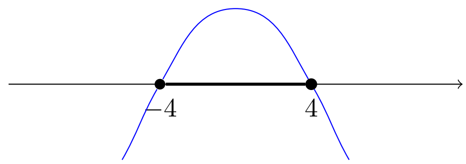


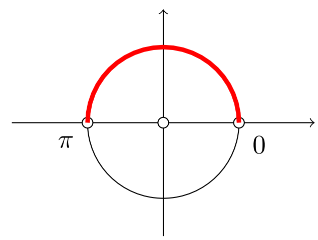
Ne zaboravimo da je kosinus periodička funkcija s temeljnim periodom 2π, iz čega iščitavamo da može biti $x \in \left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$ za bilo koji $k \in \mathbb{Z}$; po skici to vidimo tako da, krećemo li se u nekom smjeru po brojevnoj kružnici za bilo koji višekratnik broja 2π $(4\pi, 6\pi, \dots)$, opet ćemo doći do iste pozicije na brojevnoj kružnici, što daje još rješenja nejednakosti. To možemo zapisati pomoću unije po svim elementima k iz skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, pa je naše rješenje $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$.

(b) Dva su uvjeta:

1. $16 - x^2 \geq 0$,
2. $\sin(x-3) > 0$.

Prvi uvjet rješavamo pomoću skice jer je s lijeve strane nejednakosti kvadratni polinom s nultočkama oblika $x = \pm 4$ (nejednakosti ne smijemo korjenovati!). Prvi uvjet zadovoljavaju sve točke $x \in [-4, 4]$. Za drugi uvjet, opet, pomoću brojevne kružnice i promatranja y-osi, promatramo:

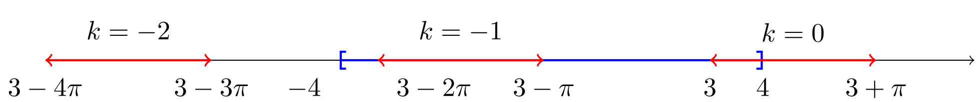




Obzirom da smo promatrali funkciju sinusa u varijabli $x-3$, zaključujemo da mora biti $x - 3 \in \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$ za $k \in \mathbb{Z}$. To znači da vrijedi $2k\pi < x - 3 < \pi + 2k\pi$, a to je ekvivalentno $3 + 2k\pi < x < 3 + \pi + 2k\pi$ (možemo raspisati obje nejednakosti zasebno i prebaciti broj 3 na drugu stranu), odnosno $x \in \langle 3 + 2k\pi, 3 + \pi + 2k\pi\rangle$ (primijetimo, kao da smo broj 3 prebacili unutar oba ruba intervala u samom zapisu).

Konačno rješenje je presjek oba uvjeta. Prvi uvjet je samo jedan interval, a drugi je beskonačan niz intervala; za rješenje ipak ne očekujemo beskonačno mnogo intervala. Što je onda ukupni presjek? Trebali bismo pogoditi koje od tih intervala siječe $[-4, 4]$, tj. za koje $k \in \mathbb{Z}$ presjek $[-4, 4] \cap \langle 3 + 2k\pi, 3 + \pi + 2k\pi\rangle$ ima zajedničkih točki. Treba pogoditi, nekako naslutiti te vrijednosti broja k; možda pomogne ako razmislimo da interval $\langle 3, 3 + \pi\rangle$ (dobiven uvrštavanjem broja $k = 0$) pomičemo ulijevo i udesno za 2π (povećavanjem ili smanjivanjem broja k) i procjenjujući, ako taj interval već ne siječe $[-4, 4]$, trebam li ga pomicati ulijevo ili udesno da dođemo do presjeka. Time uočavamo:

- Za $k = 0$ dobivamo interval $\langle 3, 3 + \pi\rangle$, a, budući da je $3 + \pi \approx 6.14$, presjek je neprazan: $[-4, 4] \cap \langle 3, 3 + \pi\rangle = \langle 3, 4]$.
- Za $k = 1$ dobivamo $\langle 3 + 2\pi, 3 + 3\pi\rangle$, no, s obzirom na to da je $3 + 2\pi \approx 9.28 > 4$, presjek je prazan: $[-4, 4] \cap \langle 3 + 2\pi, 3 + 3\pi\rangle = \emptyset$. Ovaj interval nalazi se desno od intervala $[-4, 4]$, a povećavanjem broja k išli bismo samo još više desno, stoga tu stajemo; preostaje još samo smanjivati broj k.
- Za $k = -1$ imamo $\langle 3 - 2\pi, 3 - \pi\rangle$. S obzirom na to da vrijedi $3 - 2\pi \approx -3.72$ te $3 - \pi \approx -0.86$, ne samo da imamo presjek s intervalom $[-4, 4]$, već je taj interval u potpunosti sadržan u njemu. Presjekom ostaje $[-4, 4] \cap \langle 3 - 2\pi, 3 - \pi\rangle = \langle 3 - 2\pi, 3 - \pi\rangle$.
- Za $k = -2$ imamo $\langle 3 - 4\pi, 3 - 3\pi\rangle$. S obzirom na to da je $3 - 3\pi \approx -6.58 < -4$, presjeka nema; interval se nalazi lijevo od $[-4, 4]$. Smanjivanjem broja k samo bismo išli još više lijevo, što znači da presjeka više nema.

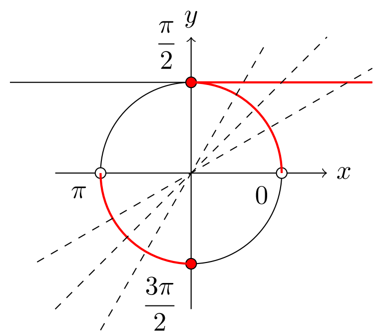


Konačno rješenje je $\mathcal{D}_f = \langle 3 - 2\pi, 3 - \pi\rangle \cup \langle 3, 4]$.

(c) Dva su uvjeta, za kosinus i za parni korijen:

1. $x+5 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\operatorname{ctg}(x+5) \geq 0$.

Iz prvog uvjeta dobivamo $x \neq -5+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. U drugom uvjetu kotangens promatramo pomoću brojevne kružnice i pravca paralelnog sa x osi koji prolazi kroz točku $(0,1)$ (najvišu točku brojevne kružnice).

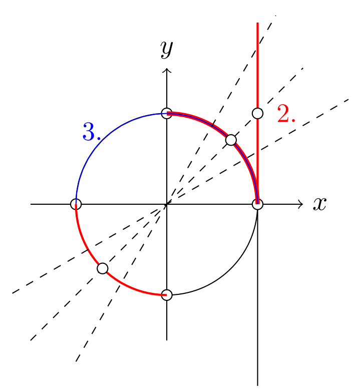


Spremni smo iščitati rješenje na isti način kao i prije, s tim da imamo na umu da je temeljni period kosinusa jednak π (to vidimo na skici tako što, ako bilo koju polovicu kružnice zarotiramo i prislonimo na drugu polovicu, dobivamo podudarnost). Rješenje ovdje je $x+5 \in \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ za $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x \in \left\langle -5+k\pi, -5+\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ za $k \in \mathbb{Z}$. Konačno rješenje je presjek oba uvjeta (zapravo smo već iskoristili prvi uvjet kako smo na skici automatski izbacili problematične točke): $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -5+k\pi, -5+\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$.

(d) Uvjeti su

1. $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
2. $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{tg} x \neq 1$,
3. $\sin x > 0$.

Druga dva slučaja možemo promatrati i na istoj brojevnoj kružnici:

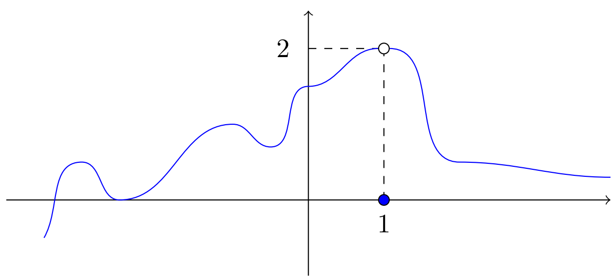


Rješenje je $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\}\right)$. □

3.1. Limes i neprekidnost

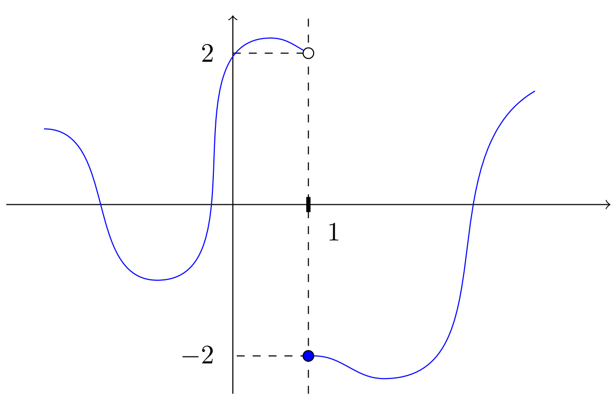
Želimo promatrati pojam *neprekidne funkcije*. Intuitivno, realna funkcija je neprekidna ako je njezin graf neprekinuta linija koju možemo nacrtati jednim potezom ruke. Želimo matematički definirati ovaj pojam kako bi ga mogli proučavati i za funkcije čiji graf ne znamo nacrtati. Neprekidne funkcije su vrlo važan pojam u matematici jer neprekidnost povlači mnoga druga, „lijepa" svojstva funkcije. Za uvođenje pojma *neprekidnosti funkcije f u točki c*, potrebno je prvo definirati pojam *limesa funkcije f u točki c*. Limes funkcije je koncept koji govori o ponašanju funkcije u okolini neke točke. **Limes funkcije f u točki** c označavat ćemo sa $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

Primjer 3.3. (a) Promotrimo sljedeću funkciju f:



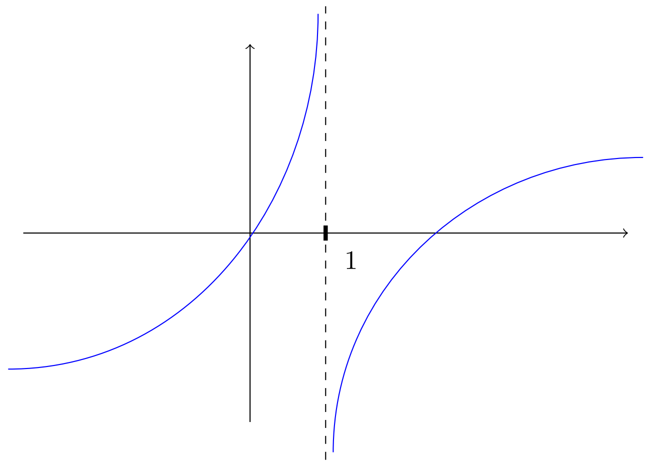
Vrijednost funkcije f u točki 1 je $f(1) = 0$ i vidimo da ta vrijednost nam „smeta" da bi mogli u jednom potezu proći kroz graf funkcije f. Međutim, kako se na x–osi približavamo jedinici, tako se funkcijske vrijednosti od f na y–osi približavaju broju 2, s koje god strane jedinice gledamo. Stoga je, intuitivno, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

(b) Promotrimo malo drugačiju funkciju f:



Vrijednost funkcije f u točki 1 je $f(1) = -2$, ali limes funkcije f u 1 ne postoji! Ako se približavamo jedinici na x–osi slijeva, tada se funkcijske vrijednosti približavaju broju 2 na y–osi, ali kada se broju 1 na x–osi približavamo zdesna, tada se funkcijske vrijednosti približavaju broju -2. Budući da s lijeve i s desne strane se približavamo k dvije različite vrijednosti, limes u 1 ne postoji.

(c) Promotrimo funkciju f koja „eksplodira" u 1:



Sada možemo i formalno definirati neprekidnost funkcije f u točki c.

Definicija 3.4. Funkcija f je **neprekidna u točki** c ako vrijedi

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Dakle, funkcija je neprekidna u točki c ako poprima upravo onu vrijednost koja je limes u toj točki, a ne neku drugu. I tada graf možemo nacrtati jednim potezom ruke.

Promatrat ćemo i:

1. limes slijeva: $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ (odnosno, kojoj vrijednosti na y–osi se približavamo ako se broju c na x–osi približavamo slijeva),
2. limes zdesna: $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ (odnosno, kojoj vrijednosti na y–osi se približavamo ako se broju c na x–osi približavamo zdesna).

U primjeru 3.3 (b) smo vidjeli da limes slijeva i limes zdesna ne moraju biti jednaki. U tom primjeru je dakle $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 2$, a $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -2$.

Limes $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ postoji ako i samo ako je

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x)!$$

Ponekad pri računanju limesa je dovoljno samo uvrstiti točku c da bi izračunali limes funkcije f u točki c, primjerice: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-3}{x+1} = \dfrac{3^2-3}{3+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. To smo mogli napraviti jer je funkcija $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+1}$ neprekidna u točki 3. Međutim, to nije uvijek moguće, i nas zapravo najviše zanimaju takvi primjeri, recimo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \left[\dfrac{1}{0+}\right] = +\infty$.

<u>Neodređeni izrazi:</u>

- $\dfrac{0}{0}$,
- $\pm\infty \cdot 0$,
- 0^0,
- $(\pm\infty)^{\pm\infty}$,
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$,
- $+\infty - \infty$,
- $-\infty + \infty$,
- $(\pm\infty)^0$,
- $1^{\pm\infty}$.

Kada u zadatku dođemo do neodređenog izraza, mi ne možemo a priori znati koliko on iznosi pa trebamo zadanu funkciju raspisati da bi se na neki način riješili neodređenog izraza. Primjerice neodređeni izraz $\frac{0}{0}$ može poprimiti više različitih vrijednosti, ovisno o tome kakvu funkciju f imamo zadanu:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}x=0,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty,$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}1=1.$

Slično, različite vrijednosti možemo dobiti za neodređene izraze 0^0 i $1^{\pm\infty}$:

- $\lim\limits_{x\to 0}0^x=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to 0}0=0$, međutim $\lim\limits_{x\to 0}x^0=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to 0}1=1,$
- $\lim\limits_{x\to 0+}0.99^{\frac{1}{x}}=0$, međutim $\lim\limits_{x\to 0+}1.01^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

Napomena 3.5. Možemo promatrati i $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ te $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

Zadatak 3.4. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x-3)^5(3x+1)^3\left(2x^2-5x+3\right)}{(1-x)^7\left(6x^3+2x^2+3x+1\right)}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^2}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$,

(i) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$,

(j) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$,

(k) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+b^2}+x}$ za $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rješenje. Kad god određujemo limes, **uvijek započinjemo provjerom oblika limesa!** Naime, ako izraz nije neodređenog oblika, nema smisla išta raspisivati jer smo u stanju odrediti vrijednost limesa! Naravno, u skoro svim zadacima ove skripte limes će biti neodređenog oblika jer se učimo raspisivanju, a ne patološkim primjerima; no, uvijek može doći neki zadatak u kratkom testu ili u kolokviju gdje je potrebno samo uvrstiti vrijednost!

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$. I brojnik i nazivnik jednak je nuli kada uvrstimo $x=1$; to znači da je jedinica nultočka i brojnika i nazivnika ta da i u brojniku i u nazivniku možemo izlučiti faktor oblika $x-1$ koji ćemo moći skratiti; to bi potencijalno eliminiralo problem nule na oba mjesta i samim time neodređenog oblika. Vrijedi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\cdot 1+1}=\frac{2}{3}.$$

Brojnik smo lako faktorizirali formulom za razliku kvadrata, dok nazivnik možemo faktorizirati na više načina; od traženja nultočki do pogađanja s obzirom na koeficijente u izrazu. Kada smo pokratili ključnu zagradu, tj. potencijalno eliminirali problem, ponovo smo uvrstili $x = 1$ da vidimo moramo li još računati ili je tu zadatak gotov.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \left[\frac{-1}{-1}\right] = 1.$

Evo primjera kada izraz nije neodređen i kada je zadatak gotov u samom početku. Da ponovimo, takvih zadataka neće biti u daljnjim raspisima, no uvijek smo dužni provjeriti!

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = [\pm\infty \mp \infty].$

Ovdje su moguća dva ponašanja; ako gledamo brojeve $x > 1$, izraz je oblika $-\infty + \infty$, a ako gledamo brojeve $x < 1$, onda je oblika $\infty - \infty$. U svakom slučaju je izraz neodređenog oblika. Ideja je da takve izraze nekako združimo zajedno; u ovom slučaju svesti ćemo sve na jedan razlomak, tj. na zajednički nazivnik.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= [\pm\infty \mp \infty] = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)\,(1+x+x^2)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)\,(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)\,(1+x+x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\,(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x+2)}{(1+x+x^2)} = -1.
\end{aligned}$$

Prelaskom iz drugog u treći red našli smo se u sličnoj situaciji kao i u (a) zadatku, s time da smo pokratili izraze suprotnog predznaka, zbog čega smo nadopisali minus predznak nakon samog kraćenja.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-3)^5(3x+1)^3\left(2x^2-5x+3\right)}{(1-x)^7\left(6x^3+2x^2+3x+1\right)} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right].$

Vrijednosti u brojniku i u nazivniku odredili smo tako što znamo da, kada x teži u beskonačnost, vrijednost samog polinoma teži prema nekoj beskonačnosti. U brojniku je polinom parnog stupnja s pozitivnim vodećim koeficijentom (točnije, vodeći član je $3^3 \cdot 2x^{10}$), stoga brojnik ide u pozitivnu beskonačnost; za razliku od nazivnika s vodećim članom oblika $-6x^{10}$ koji teži prema negativnoj beskonačnosti.

Za razliku od prijašnjih zadataka, ovdje ne možemo faktorizirati izraz oblika $x - x_0$ jer sada x ne teži prema nekom konkretnom broju x_0. U ovakvom tipu zadatka uvijek dijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom polinoma u brojniku i u nazivniku! Konkretno, u brojniku je polinom 10. stupnja, kao i u nazivniku, pa brojnik i nazivnik dijelimo s x^{10} (da smo, recimo, u brojniku imali 5. stupanj, a u nazivniku 8., dijelili bismo sa x^8).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-3)^5(3x+1)^3\left(2x^2-5x+3\right)}{(1-x)^7\left(6x^3+2x^2+3x+1\right)}\frac{:x^{10}}{:x^{10}} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{(x-3)^5}{x^5}\cdot\frac{(3x+1)^3}{x^3}\cdot\frac{2x^2-5x+3}{x^2}}{\frac{(1-x)^7}{x^7}\cdot\frac{6x^3+2x^2+3x+1}{x^3}} \\
= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\frac{x-3}{x}\right)^5\left(\frac{3x+1}{x}\right)^3\cdot\frac{2x^2-5x+3}{x^2}}{\left(\frac{1-x}{x}\right)^7\cdot\frac{6x^3+2x^2+3x+1}{x^3}} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^5\left(3+\frac{1}{x}\right)^3\cdot\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^7\cdot\left(6+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
= \frac{(1-0)^5\cdot(3+0)^3\cdot(2-0+0)}{(0-1)^7\cdot(6+0+0+0)} &= \frac{1^5\cdot 3^3\cdot 2}{(-1)^7\cdot 6} = -9.
\end{aligned}$$

Prilikom dijeljenja brojnika i nazivnika sa x^{10} grupirali smo potencije varijable x po zagradama i to tako da svaka zagrada ima onoliku potenciju kolikog je ona stupnja kao polinom. Primjerice, izraz $(x-3)^5$ je polinom 5. stupnja pa smo tom izrazu dodijelili x^5. Inače, da nismo imali polinom grupiran po zagradama nego u standardnom, izmnoženom obliku, napravili bismo standardno dijeljenje član po član.

Prelaskom s drugog u treći red vidimo i samu motivaciju ovog postupka: dobili smo razlomke koji će težiti u nulu kako $x \to +\infty$ te će konačni rezultat biti produkt slobodnih brojeva.

Sami limes mogli smo iščitati direktno iz samog zadatka! Naime, baš kada $x \to \pm\infty$ (i jedino tada!) možemo pogledati vodeće članove u brojniku i nazivniku i vidjeti kakav je njihov omjer. Konkretno, vodeći član u brojniku je $x^5 \cdot 3^3 x^3 \cdot 2x^2 = 54x^{10}$, a u nazivniku je $(-1)^7 x^7 \cdot 6x^3 = -6x^{10}$. Rješenje zadatka svodi se na limes njihovog omjera: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{54x^{10}}{-6x^{10}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-9) = -9$. Razlog zašto smo mogli zanemariti preostale članove polinoma u brojniku i u nazivniku leži u tome da je u beskonačnosti (pozitivnoj ili negativnoj) utjecajan upravo vodeći član; baš kao kada smo gledali kvadratni polinom i gledali hoće li njegovi krajevi ići u $+\infty$ ili u $-\infty$ pa smo za to promatrali isključivo vodeći koeficijent.

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^2}} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3 : x}{x + x^{\frac{2}{3}} : x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+x^{-\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = 2.$

Postupak rješavanja je potpuno analogan prethodnom zadatku, samo što smo korijen morali raspisati u obliku potencije kako bismo u konačnici odredili najveću potenciju i što točno dobivamo samim dijeljenjem s najvećom potencijom od x.

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]$. U brojniku je najveća potencija stupnja $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$; naime, gledamo da je vodeći član oblika $\sqrt{x^2} \sim x$ (pripazimo, općenito vrijedi $\sqrt{x^2} = |x|$, no ovdje nismo pisali apsolutnu vrijednost jer nam je samo bila bitna potencija varijable x). Računamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} : x}{x+1 \quad : x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.\end{aligned}$$

Prilikom dijeljenja u brojniku smo umjesto x napisali $|x|$. Prisjetimo se definicije apsolutne vrijednosti:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Dakle, pozitivni broj ostaje isti (i zato je $|x| = x$), dok negativnom mijenjamo predznak tako da broj pomnožimo s -1 (i tada je $|x| = -x$). U ovom limesu ne možemo znati kakav je točno x. No, budući da $x \to +\infty$, nas zanimaju samo „iznimno veliki" brojevi x (po definiciji limesa, oni koji su „jako blizu" vrijednosti $+\infty$). Zato možemo računati kao da imamo samo pozitivne brojeve i umjesto x s kojim dijelimo napisati $|x|$.

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \left[\dfrac{+\infty}{-\infty}\right]$.

Zadatak se od prethodnog razlikuje samo u jednom detalju: $x \to -\infty$. Postupak je ovdje sasvim isti, no jedna stvar se mijenja: ne gledamo više „jako velike” brojeve, nego „jako malene”, „jako negativne” brojeve. Stoga ne možemo zamijeniti x sa $|x|$, već koristimo da vrijedi $|x| = -x$, odnosno $x = -|x|$. I dalje možemo mijenjati varijablu x s apsolutnom vrijednošću, što nam treba za parni korijen u zadatku, ali ovoga puta stavljamo minus predznak.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} : x}{x+1 \quad : x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-|x|}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{-\sqrt{1}}{1} = -1.$$

Sada smo dobili suprotan broj od onog u prethodnom zadatku. Suprotni predznak mogli smo očekivati i iz neodređenog oblika, s obzirom na to da nam se promijenio predznak beskonačnosti u nazivniku.

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right].$

Ovdje ne dijelimo s najvećom potencijom od x jer varijabla ne teži u beskonačnost. Umjesto toga, super bi bilo kada bismo imali polinom s prirodnim brojevima kao potencijama. S tim ciljem napravit ćemo supstituciju $x = t^{12}$; na onu potenciju koja će „pokratiti” oba korijena, a nju dobivamo traženjem višekratnika broja 3 i 4.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} x = t^{12} & \\ x \to 1 & \implies \quad t \to 1 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t^{12}}-1}{\sqrt[4]{t^{12}}-1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1}$$
$$= \lim_{t\to 1} \frac{\left(t^2+1\right)(t+1)(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)} = \lim_{t\to 1} \frac{\left(t^2+1\right)(t+1)}{\left(t^2+t+1\right)} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}.$$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = [+\infty - \infty].$

Izraze ne možemo direktno oduzeti, no možemo pomnožiti s istim izrazom uz predznak plusa kako bismo razlikom kvadrata malo bolje sredili izraz, odnosno riješili se korijena.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0.$$

U posljednjem izrazu mogli smo dijeliti s najvećom potencijom varijable x (a to je upravo x) i uvjeriti se u ovaj oblik limesa.

(j)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=[+\infty-\infty]=\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-1-\left(x^2-7x+3\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&\quad=\left[\frac{\pm\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\frac{:x}{:x}\\
&\quad=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\pm\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\pm\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\left[\frac{5}{\pm1\pm1}\right]=\pm\frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

Ili rješenje možemo zapisati kao:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=\dfrac{5}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=-\dfrac{5}{2}$.

(k)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+b^2}+x}=\left[\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty}\right]\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+b^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+b^2}-x}{\sqrt{x^2+b^2}-x}\\
&\quad=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+a^2-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}-x\right)}{\left(x^2+b^2-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^2\left(\sqrt{x^2+b^2}-x\right)}{b^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}\\
&\quad=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^2\left(\sqrt{x^2+b^2}-x\right)}{b^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}\frac{:x}{:x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^2\left(-\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}-1\right)}{b^2\left(-\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}-1\right)}\\
&\quad=\frac{a^2(-1-1)}{b^2(-1-1)}=\frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}
$$

□

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Zadatak 3.5. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 13x}{\sin 12x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

Rješenje. U ovom zadatku nastojat ćemo prepoznati uokvireni limes sa sinusom. Bitno je pritom naglasiti da nije bitno kamo teži varijabla po kojoj puštamo limes, već određeni izraz, „paket”, koji se nalazi unutar sinusa mora težiti u 0 i taj isti izraz mora biti i u nazivniku. Ovo ćemo nešto bolje pojasniti na samom primjeru.

(a) Razlika između uokvirenog limesa i ovog koji nam je zadan je u dvjema stvarima. Prvo, u tabličnom limesu varijabla x teži u nulu, dok u ovom zadatku ona teži u beskonačnost. Drugo, uokvirena formula navodi funkciju sinusa u varijabli x, dok je ovdje zadan u varijabli $\frac{1}{x}$. Zapišimo zadani limes na malo drugačiji način:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = [+\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Sada vidimo da imamo oblik iz formule: $\lim\limits_{\text{paket}\to 0}\frac{\sin(\text{paket})}{\text{paket}}$, gdje je paket$=\frac{1}{x}$. Dakle,

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = [+\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Ovaj zadatak mogli smo riješiti i supstitucijom $t=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = [+\infty\cdot 0] = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{t} & & \\ x\to\infty & \Longrightarrow & t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 13x}{\sin 12x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 13x}{13x}\cdot 13x}{\frac{\sin 12x}{12x}\cdot 12x} = \lim_{x\to 0}\frac{13\frac{\sin 13x}{13x}}{12\frac{\sin 12x}{12x}} = \frac{13\cdot 1}{12\cdot 1} = \frac{13}{12},$$

gdje smo predzadnju jednakost dobili iz činjenice da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 13x}{13x}=1$ jer ako $x\to 0$, onda i $13x\to 0$. Analogno je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{12x}=1$.

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}$$
$$= \left[\sin^2 x+\cos^2 x=1\right] = \lim_{x\to 0}-\frac{\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)} = -\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x+1}\right] = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Izveli smo još jednu korisnu formulu:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\cos x\sin x}{\cos x}}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Zadatak 3.6. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$, (b) $\lim_{x\to+\infty} x\,(\ln(1+x)-\ln x)$,

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$, (d) $\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$,

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Rješenje. (a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = e\cdot 1^{\frac{1}{2}} = e.$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} x\,(\ln(1+x)-\ln x) = [+\infty\,(+\infty-(+\infty))] = \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1+x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{\ln\ \text{nepr.}}{=} \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1.$$

Zašto smo smjeli zamijeniti redoslijed logaritma i limesa? Vrijedi pravilo da svaka neprekidna funkcija može mijenjati mjesto s limesom jer ako je f neprekidna u c, onda vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = f\left(\lim_{x\to c} x\right)$. Odnosno, u zadatku smo koristili da vrijedi $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$ za $f(x)=\ln(x)$ i $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ jer je logaritam neprekidna funkcija.

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$= {}^{\log}\overset{\text{nepr.}}{=} \log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log e.$$

(d)

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right) = \lim_{x\to a}\left(\ln\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}}\right)$$
$$= \lim_{x\to a}\left(\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\right) \overset{\text{nepr.}}{=} \ln\left(\lim_{x\to a}\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

(e)

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=[\pm\infty\cdot 0]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$$
$$\overset{\text{nepr.}}{=}\ln\left(\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right)^{\frac{1}{1-x}}\right)=\ln e^{\frac{1}{1-0}}=1.$$

□

Zadatak 3.7. Odredite $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, pri čemu je $a>0$, $a\neq1$.

Rješenje.

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}\text{supstitucija}: & t=a^x-1 & \Rightarrow x=\log_a(t+1)\\ & x\to0 & \Rightarrow t\to0\end{matrix}\right]=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(t+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to0}\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}}\overset{\text{nepr.}}{=}\frac{1}{\log_a\left(\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a,$$

pri čemu smo u predzadnjoj jednakosti upotrijebili formulu $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$. □

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}\qquad\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

Zadatak 3.8. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt2-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$, (b) $\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin x}$, (c) $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

Rješenje. (a)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt2-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt2-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sqrt2+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt2+\sqrt{1+\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-(1+\cos x)}{\sin^2 x\left(\sqrt2+\sqrt{1+\cos x}\right)}:\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\sqrt2+\sqrt{1+\cos x}\right)}$$
$$=\frac{\frac12}{1^2\cdot(\sqrt2+\sqrt{1+1})}=\frac{1}{4\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{8}.$$

(b)

$$\lim_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin x}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac1x}=\left[1^{\pm\infty}\right]=\lim_{x\to0}\left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

(c)

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\left[1^{+\infty}\right]=\lim_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x\sin x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x\sin x}}=\lim_{x\to0}\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\frac{\cos x-1}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}}=e^{\frac{-\frac12}{1}}$$
$$=e^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt e}=\frac{\sqrt e}{e}.$$

$\square$

Zadatak 3.9. Odredite nepoznate parametre $a, b, c \in \mathbb{R}$ takve da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ c, & x = 2. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Rješenje. (a) Želimo da funkcija f bude neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$, odnosno da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim\limits_{x\to t} f(x) = f(t)$. Primijetimo, f je neprekidna funkcija u svim točkama $x \neq 2$ zato što je na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, f definirana kao $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$ što je neprekidna funkcija. Dakle, treba još provjeriti uvjet $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Ovaj izraz bi trebao biti jednak $f(2) = c$ pa zaključujemo da je $c = 4$.

(b) Jasno, f je neprekidna za $x < -\dfrac{\pi}{2}$, za $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ i za $x > \dfrac{\pi}{2}$, odnosno neprekidna je na $\left\langle -\infty, -\dfrac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\pi}{2}, +\infty \right\rangle$. Treba provjeriti kada vrijedi $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ te $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. To ćemo provjeriti tako da gledamo limese slijeva i zdesna.

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} (-2\sin x) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} (a\sin x + b) = a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -a + b.$$

Ova dva izraza moraju biti jednaka pa dobivamo jednadžbu

$$-a + b = 2.$$

Pogledajmo analogne limese u točki $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} (a\sin x + b) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = a + b,$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Dobivamo i drugu jednadžbu:

$$a + b = 0.$$

Preostaje riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} -a + b &= 2, \\ a + b &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje tog sustava je $a = -1, b = 1$.

$\square$

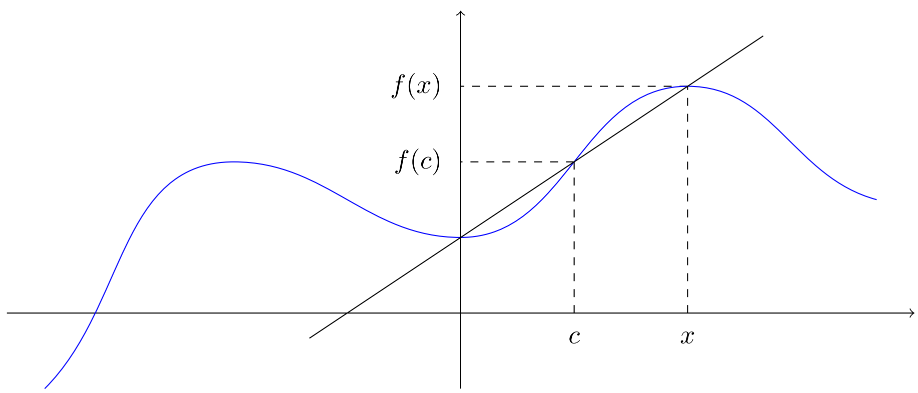
3.2. Derivacije

Definicija 3.6. Funkcija f dana na otvorenom intervalu I je **derivabilna u točki** $c \in I$ ako postoji

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Taj limes nazivamo **derivacijom** od f u točki c i označavamo sa $f'(c)$. Ako je f derivabilna u svakoj točki $c \in \mathcal{D}_f$, onda kažemo da je f derivabilna.

Promotrimo sekantu funkcije f (čiji je graf nacrtan plavom bojom na sljedećoj skici) koja prolazi točkama $(c, f(c))$ i $(x, f(x))$. Koeficijent smjera (nagib) te sekante je dan sa $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Kako se x sve više približava c, tako sekanta postaje tangenta na funkciju f u točki $(c, f(c))$. Dakle, koeficijent smjera tangente na funkciju f u točki c je upravo $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$.



Iz definicije derivacije mogu se izvesti derivacije funkcija koje se često pojavljuju u zadacima, a tretirat ćemo ih kao „tablične vrijednosti" derivacija koje ćemo koristiti kao standardne.

$C' = 0$, $C \in \mathbb{R}$ (konstanta)	
$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$	$(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Primjer 3.7. Pokažimo kako izvesti neke od formula zapisanih u tablici:

1. $f(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{C - C}{x - c} = \lim_{x \to c} 0 = 0.$$

2. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{x^n - c^n}{x-c} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x^{n-1}+x^{n-2}c+\cdots+xc^{n-2}+c^{n-1})}{x-c} = \lim_{x\to c}(x^{n-1}+x^{n-2}c+\cdots+xc^{n-2}+c^{n-1}) \\
&= c^{n-1}+c^{n-2}\cdot c+\cdots+c\cdot c^{n-2}+c^{n-1} = nc^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Direktno pomoću definicije se mogu izvesti i sljedeća pravila deriviranja koja koristimo prilikom derivacija složenijih funkcija:

1. $[C\cdot f(x)]' = C\cdot f'(x)$,
2. $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,
3. $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$,
4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$,
5. $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Najvažnijim i najpraktičnijim se ispostavlja posljednje pravilo, iako možda na prvu izgleda zbunjujuće.

Zadatak 3.10. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2 + x^3 + \sin x$,

(b) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^4 + 1)$,

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[7]{e}$,

(e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x - (x^3+2)\log x$,

(f) $f(x) = (x^2+3)^3$,

(g) $f(x) = \ln(\sin x)$,

(h) $f(x) = \sqrt{xe^x}$,

(i) $f(x) = e^{-x} + 2^{\sin\frac{x}{2}} + \sin^2 x$.

Rješenje. (a)

$$f'(x) = \left(x^2+x^3+\sin x\right)' = \left(x^2+x^3\right)' + (\sin x)' = \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' + (\sin x)' = 2x + 3x^2 + \cos x.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\left(x^2-x+1\right)\left(x^4+1\right)\right]' = \left(x^2-x+1\right)'\left(x^4+1\right) + \left(x^2-x+1\right)\left(x^4+1\right)' \\
&= (2x-1+0)\left(x^4+1\right) + \left(x^2-x+1\right)\left(4x^3+0\right) = 2x^5 - x^4 + 2x - 1 + 4x^5 - 4x^4 + 4x^3 \\
&= 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 2x - 1.
\end{aligned}
$$

(c)

$$f'(x) = \frac{(x)'\left(x^2+1\right) - x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1-x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

(d)

$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(\left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(e^{\frac{1}{7}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' + 0 = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)'$$
$$= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}},$$

pri čemu treba obratiti pozornost da je $e^{\frac{1}{7}}$ broj (konstanta), a ne funkcija, pa je zato derivacija jednaka 0!

(e)

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' x^3 - \sin x \cdot \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} + (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' - \left(x^3 + 2\right)' \log x - \left(x^3 + 2\right) (\log x)'$$
$$= \frac{x^3 \cos x - 3x^2 \sin x}{x^6} + e^x \cos x - e^x \sin x - 3x^2 \log x - \frac{x^3 + 2}{x \ln 10}.$$

(f) Kod ovako zadane funkcije f primjećujemo da nemamo samo x^3, već se nešto složeniji izraz nalazi pod kubom. Stoga ovakvu f deriviramo pomoću pravila za derivaciju kompozicija funkcija: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Kod nas je $f(x) = x^3$, a $g(x) = x^2 + 3$. Dakle, prvo deriviramo funkciju f, $f'(x) = 3x^2$, i zatim u tu derivaciju uvrstimo funkciju g: $f'(g(x)) = \left(x^2 + 3\right)^2$. Naposljetku to pomnožimo s derivacijom funkcije g, $g'(x) = 2x$. Sveukupno imamo sljedeći postupak:

$$f'(x) = 3\left(x^2 + 3\right)^2 \cdot \left(x^2 + 3\right)' = 3\left(x^2 + 3\right)^2 \cdot 2x = 6x\left(x^2 + 3\right)^2.$$

(g)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

(h)

$$f'(x) = \left((xe^x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} (xe^x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (xe^x)' = \frac{1}{2} (xe^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left((x)' e^x + x (e^x)'\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{xe^x}} (e^x + xe^x) = \frac{\sqrt{e^x}(1 + x)}{2\sqrt{x}}.$$

(i)

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-x)' + 2^{\sin \frac{x}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\sin \frac{x}{2}\right)' + 2 \sin x (\sin x)'$$
$$= -e^{-x} + 2^{\sin \frac{x}{2}} \cdot \ln 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \sin x \cos x = -e^{-x} + 2^{\sin \frac{x}{2} - 1} \cdot \ln 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + 2 \sin 2x.$$

□

3.2.1. Logaritamsko deriviranje

Neka je dana funkcija oblika $f(x) = g(x)^{h(x)}$, odnosno $(\text{nešto o x})^{\text{nešto o x}}$. Umjesto x^2, $x^{-8.3}$, $x^{\frac{\pi}{2}}$, $(\sin x)^{\frac{5}{2}}$, $2^{\sin \frac{x}{2}}$ ili 0.5^{x-1} što smo do sada promatrali, sada se x pojavljuje i u bazi i u eksponentu, primjerice $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^{\sin \frac{x}{2}}$. Zanima nas kako derivirati takve funkcije. Za funkcije takvog oblika koristimo **logaritamsko deriviranje**, odnosno prvo logaritmiramo funkciju, izračunamo derivaciju novodobivene funkcije i zatim se vratimo na derivaciju originalne funkcije. Postupak ćemo ilustrirati na primjerima u sljedećem zadatku.

Zadatak 3.11. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^{\sin x}$, (b) $f(x) = (\ln x)^x$, (c) $f(x) = \sqrt[x]{x}$,

(d) $f(x) = \dfrac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2+3}$, (e) $f(x) = \ln \sqrt[x]{\sin x}$, (f) $f(x) = e^{\cos x} + (\cos x)^x$,

(g) $f(x) = \dfrac{(x^2+2x+3)^{15}(2x+5)^{10}}{(5x-9)^{13}}$.

Rješenje. (a)

$$f(x) = x^{\sin x} \ /\ln \Longrightarrow \ln f(x) = \ln\left(x^{\sin x}\right) \Longrightarrow \ln f(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

Sada smo potenciju, koju ne znamo derivirati, pretvorili u produkt funkcija, što znamo derivirati.

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \sin x \cdot \ln x \ /' \\ \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} f'(x) &= \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \ / \cdot f(x) \\ \Longrightarrow f'(x) &= x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right). \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = (\ln x)^x \ /\ln \Longrightarrow \ln f(x) = \ln\left((\ln x)^x\right) \Longrightarrow \ln f(x) = x \ln(\ln x) \ /'$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln(\ln x) + \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \ / \cdot f(x) \Longrightarrow f'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right).$$

(c)

$$f(x) = \sqrt[x]{x} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}} \ /\ln \Longrightarrow \ln f(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right) \Longrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln x \ /'$$
$$\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \ / \cdot f(x) \Longrightarrow f'(x) = \sqrt[x]{x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right).$$

(d) Na funkciju $f(x) = \dfrac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2+3}$ možemo odmah probati djelovati s prirodnim logaritmom i s desne strane dobit ćemo zbroj dva logaritma, što znamo derivirati. Međutim, u nekim sličnim zadacima taj postupak nam neće pomoći da riješimo zadatak. Tada je ideja prvo raspisati derivaciju razlomka koji se nalazi u f i zatim pogledati koji od faktora moramo logaritamski derivirati.

$$f'(x) = \frac{\left[(\cos x)^{\sin x}\right]'\left(x^2+3\right) - (\cos x)^{\sin x}(2x)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Vidimo da jedino dio $\left[(\cos x)^{\sin x}\right]'$ moramo logaritamski derivirati. Definiramo funkciju $g(x) = (\cos x)^{\sin x}$ koju ćemo logaritamski derivirati.

$$g(x) = (\cos x)^{\sin x} \ /\ln \Longrightarrow \ln g(x) = \sin x \ln(\cos x) \ /' \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \cos x \ln(\cos x) + \sin x \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \ / \cdot g(x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow g'(x) = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) - \sin x \operatorname{tg} x\right).$$

Sada slijedi da je

$$f'(x) = \frac{(\cos x)^{\sin x}\left((\cos x \ln(\cos x) - \sin x \operatorname{tg} x)\left(x^2+3\right) - 2x\right)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

(e) Zadatak možemo riješiti na dva različita načina. Prvi način ne upotrebljava logaritamsko deriviranje. Funkciju f zapišemo na ekvivalentno kao $f(x) = \ln \sqrt[x]{\sin x} = \ln(\sin x)^{\frac{1}{x}} = x^{-1}\ln(\sin x)$. I zatim računamo:

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} \cdot \ln(\sin x) + x^{-1}\frac{1}{\sin x}\cos x = -\frac{\ln(\sin x)}{x^2} + \frac{\operatorname{ctg} x}{x}.$$

Alternativno, zadatak smo mogli riješiti na sljedeći način:

$$f(x) = \ln\left((\sin x)^{\frac{1}{x}}\right) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{(\sin x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \left((\sin x)^{\frac{1}{x}}\right)'.$$

Definiramo funkciju $g(x) = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$ i nju deriviramo logaritamski:

$$\ln g(x) = \frac{1}{x}\ln(\sin x) \ /' \Longrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x \cdot x - \ln(\sin x)}{x^2},$$

pa je $g'(x) = (\sin x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x \operatorname{ctg} x - \ln(\sin x)}{x^2}$. Konačno, $f'(x) = \frac{x\operatorname{ctg} x - \ln(\sin x)}{x^2}$.

(f) Ako pokušamo odmah djelovati s prirodnim logaritmom na funkciju f, dobit ćemo $\ln f(x) = \ln(e^{\cos x} + (\cos x)^x)$. Međutim, taj izraz ne znamo rastaviti kako bi ga mogli lako derivirati. Stoga u ovom podzadatku nam je opet jednostavnije prvo derivirati f i zatim vidjeti koji dio moramo logaritamski derivirati.

$$f'(x) = \left(e^{\cos x}\right)' + \left((\cos x)^x\right)'.$$

Definiramo $g(x) = (\cos x)^x$. Slijedi:

$$\ln g(x) = x\ln(\cos x) \ /' \Longrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln(\cos x) + x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x).$$

Zaključujemo, $g'(x) = (\cos x)^x(\ln(\cos x) - x\operatorname{tg} x)$, odnosno $f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x) + (\cos x)^x(\ln(\cos x) - x\operatorname{tg} x)$.

(g) Ovaj zadatak možemo riješiti i direktno, pomoću pravila za derivaciju razlomka i produkta. Međutim, puno jednostavniji račun dobivamo korištenjem logaritamskog deriviranja.

$$\begin{aligned}
& f(x) = \frac{(x^2+2x+3)^{15}(2x+5)^{10}}{(5x-9)^{13}} \ /\ln \\
\Longrightarrow & \ln f(x) = \ln\left(\left(x^2+2x+3\right)^{15}(2x+5)^{10}\right) - \ln\left((5x-9)^{13}\right) \\
\Longrightarrow & \ln f(x) = 15\ln\left(x^2+2x+3\right) + 10\ln(2x+5) - 13\ln(5x-9) \ /' \\
\Longrightarrow & \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{15}{x^2+2x+3}\cdot(2x+2) + \frac{10}{2x+5}\cdot 2 - \frac{13}{5x-9}\cdot 5 \ / \cdot f(x) \\
\Longrightarrow & f'(x) = \frac{\left(x^2+2x+3\right)^{15}(2x+5)^{10}}{(5x-9)^{13}}\left(\frac{30(x+1)}{x^2+2x+3} + \frac{20}{2x+5} - \frac{65}{5x-9}\right).
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Derivacije višeg reda

Do sada smo promatrali funkciju f i njenu derivaciju f'. Derivacija funkcije je ponovno funkcija pa nas zanima možemo li promatrati derivaciju funkcije f' (odnosno, postojanje odgovarajućeg limesa): $(f') = f''$. Derivaciju derivacije od f ćemo zvati **druga derivacija** funkcije f i označavati sa f'' ili $f^{(2)}$. Analogno možemo promatrati i derivaciju druge derivacije funkcije f, odnosno treću derivaciju od f, koju označavamo sa f''' ili $f^{(3)}$. Općenito, n–tu derivaciju funkcije f označavamo sa $f^{(n)}$. U tom kontekstu možemo koristiti oznake $f^{(1)}$ za f' i $f^{(0)}$ za f.

Zadatak 3.12. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odredite n-tu derivaciju funkcije f u točki x_0 ako je:

(a) $f(x) = x^5$, $x_0 = 0$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = -1$, (c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$.

Rješenje. (a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5, & f(x_0) &= 0,\\
f'(x) &= 5x^4, & f'(x_0) &= 0,\\
f''(x) &= 20x^3, & f''(x_0) &= 0,\\
f'''(x) &= 60x^2, & f'''(x_0) &= 0,\\
f^{(4)}(x) &= 120x, & f^{(4)}(x_0) &= 0,\\
f^{(5)}(x) &= 120, & f^{(5)}(x_0) &= 120,\\
f^{(k)}(x) &= 0, & f^{(k)}(x_0) &= 0, \text{ za svaki } k \geq 6.
\end{aligned}$$

Općenito, $f^{(n)} = \begin{cases} 0, & n \neq 5, \\ 120. & n = 5. \end{cases}$

(b) Raspišimo prvih nekoliko derivacija od f dok ne uočimo pravilo koje zadovoljava n–ta derivacija.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1}, & f(x_0) &= -1,\\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(x_0) &= -(-1)^2 = -1,\\
f''(x) &= 2x^{-3}, & f''(x_0) &= 2(-1)^{-3} = -2,\\
f'''(x) &= -6x^{-4}, & f'''(x_0) &= -6(-1)^{-4} = -6,\\
f^{(4)}(x) &= 24x^{-5}, & f^{(4)}(x_0) &= 24(-1)^{-5} = -24,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-n-1}, & f^{(n)}(x_0) &= (-1)^n n! (-1)^{-n-1} = -n!.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x,\\
f'(x) &= \cos x,\\
f''(x) &= -\sin x,\\
f'''(x) &= -\cos x,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x,\\
f^{(5)}(x) &= \cos x.
\end{aligned}$$

Primijetimo da imamo uzorak koji se ponavlja, dakle:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k, \\ \cos x, & n = 4k+1, \\ -\sin x, & n = 4k+2, \\ -\cos x, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -1, & n = 4k+1, \\ 1, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

3.2.3. L'Hôpitalovo pravilo

Teorem 3.8. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval/poluinterval/cijeli $\mathbb{R}$ i $c \in I$ ili $c = \pm\infty$. Ako vrijedi:*

1. *($\lim_{x\to c} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to c} g(x) = 0$) ili ($\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$),*
2. *$g'(x) \neq 0$, za sve $x \in I$,*
3. *postoji $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (može biti i beskonačno).*

Tada je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Zadatak 3.13. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x}$,

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - x - \sqrt{2}}$,

(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$,

(e) $\lim_{x\to a+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

Rješenje. (a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} a^{\ln x} \cdot \ln a = a^{\ln 0} \cdot \ln a = \ln a.$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2} \cdot 5(5x-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 4(4x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot 3(3x-2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{5}{2\sqrt{5x-1}} - \frac{2}{\sqrt{4x+1}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{\frac{5}{2\cdot 3} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2}} = \frac{\frac{5-4}{6}}{\frac{3-1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{3}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - x - \sqrt{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}} - 1} = \frac{3 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{3}{\frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})}{-7}.$$

(d)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 5x(-\sin 5x)\cdot 5}{5\cdot 2\cdot \cos x(-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x \sin 5x}{\cos x \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(-\sin 5x)\cdot 5\cdot \sin 5x + \cos 5x(\cos 5x)\cdot 5}{-\sin x\sin x + \cos x\cos x} = \frac{-1\cdot 5\cdot 1 + 0}{-1\cdot 1 + 0} = 5.$$

(e)

$$\lim_{x\to a+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to a+} \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x} = \lim_{x\to a+} \frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to a+} \frac{e^x}{e^x(x-a)+e^x} = \frac{e^a}{e^a\cdot 0 + e^a} = 1.$$

□

L'Hôpital za oblik $[0\cdot\pm\infty]$

Zadatak 3.14. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-\sin x)\operatorname{ctg} x$, (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\operatorname{tg} x$, (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

Rješenje. (a)

$$\lim_{x\to 0} \ln(1-\sin x)\operatorname{ctg} x = [0\cdot\pm\infty] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{\operatorname{tg} x} \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-\sin x}\cdot(-\cos x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^3 x}{1-\sin x} = \frac{-1}{1-0} = -1.$$

U prvoj jednakosti smo koristili „trik” $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{\frac{1}{a}}$.

(b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\operatorname{tg} x = [0\cdot\pm\infty] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{-0}{-\frac{1}{1}} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = [+\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1.$$

□

L'Hôpital za oblik $[\pm\infty\mp\infty]$

Zadatak 3.15. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Rješenje. (a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\pm\infty\mp\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=$$
$$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1+0\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\pm\infty\mp\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+\frac{x}{x}+1}=\frac{-1}{0+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

□

L'Hôpital za oblik $\left[0^0\right]$, $\left[(\pm\infty)^0\right]$, $\left[1^{\pm\infty}\right]$

Zadatak 3.16. Odredite sljedeće limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x)^{1-x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$, (d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Rješenje. (a) Vrijedi $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=\left[0^0\right]$. Označimo sa $L:=\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Slijedi:

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\overset{\ln\ \text{nepr.}}{=}\lim_{x\to 0+}(\operatorname{tg} x\ln(\sin x))=[0\cdot(-\infty)]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0+}(-\sin x\cos x)=0.$$

Ne smijemo zaboraviti da smo izračunali $\ln L$, pa je $L=e^0=1\Longrightarrow\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=L=e^0=1$.

(b) Za $\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x)^{1-x}=\left[0^0\right]$ označimo $L=\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x)^{1-x}$. Računamo:

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 1+}(\ln x)^{1-x}\overset{\text{nepr.}}{=}\lim_{x\to 1+}\ln(\ln x)^{1-x}=\lim_{x\to 1+}(1-x)\ln(\ln x)=[0\cdot(-\infty)]=$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{1-x}}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{(1-x)^2}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'H}}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{2(1-x)\cdot(-1)}{\ln x+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to 1+}\frac{2(x-1)}{\ln x+1}=\frac{2\cdot 0}{0+1}=0.$$

Iz čega dobivamo da je $\lim\limits_{x\to 1+}(\ln x)^{1-x}=L=e^0=1$.

(c) Neka je $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \left[0^0\right] =: L$. Slijedi:

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0+} x^x \overset{\text{nepr.}}{=} \lim_{x\to 0+} x \ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Dakle, rješenje je $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = L = e^0 = 1$.

(d) Označimo $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} = \left[1^{\pm\infty}\right] =: L$. Računamo:

$$\ln L = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} \overset{\text{nepr.}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left((\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin^2 x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Odnosno, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1$.

□

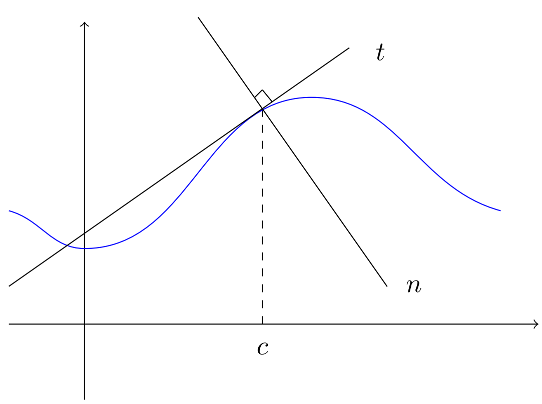
3.3. Tangenta i normala funkcije

Već smo vidjeli da jednadžba tangente t na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$ glasi

$$y - f(c) = f'(c)(x-c).$$

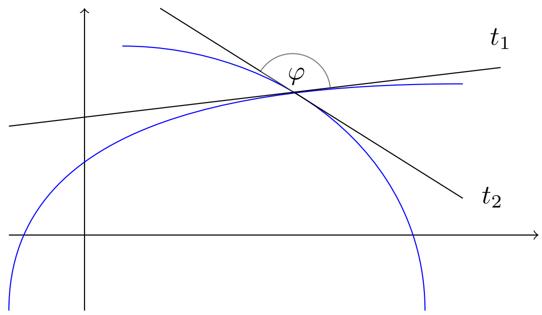
Normala je pravac okomit na tangentu u točki u kojoj tangenta dira graf funkcije. Budući da za okomite pravce, odnosno njihove koeficijente smjera k_1 i k_2, vrijedi $k_1 \cdot k_2 = -1$, slijedi da je jednadžba normale n koja dira graf funkcije f u točki $(c, f(c))$ dana sa:

$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x-c).$$



Ako je $f'(c) = 0$, možemo jednadžbu normale pisati u obliku $f'(c)(y - f(c)) = -(x-c)$.

Promotrimo sada kako računamo kut između dviju krivulja. Kao na skici, zapravo promatramo kut φ između tangenti t_1 i t_2 na te krivulje u točki presjeka.



Neka je k_1 nagib (koeficijent smjera) tangente t_1 na prvu krivulju, a k_2 nagib tangente t_2 na drugu krivulju. Tada vrijedi $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ i $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, gdje su φ_1, odnosno φ_2, redom kutevi koje tangente t_1, odnosno t_2, zatvaraju sa x–osi. Vrijedi i $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ pa dobivamo

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

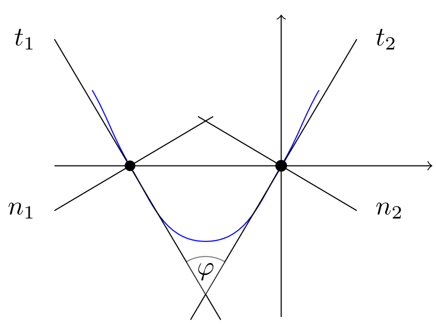
Zapravo koristimo formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right| \quad \text{i} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|\right)$$

kako bismo uvijek dobili onaj manji kut između krivulja.

Zadatak 3.17. Nađite jednadžbe tangente i normale na parabolu $y = 2x^2 + 4x$ u točkama u kojima parabola siječe os x. Dodatno, odredite kut koji zatvaraju te dvije tangente.

Rješenje. Skicirajmo kako otprilike izgleda ta parabola.



Parabola siječe os x u $x_1 = -2$ i $x_2 = 0$. Za određivanje jednadžbi tangenata potrebna nam je još i vrijednost prve derivacije u tim točkama. Imamo $y'(x) = 4x + 4$, pa je $y'(x_1) = -4$, $y'(x_2) = 4$. Sada možemo zapisati jednadžbe:

$$t_1 \ldots y - 0 = -4(x+2) \Longrightarrow y = -4x - 8, \qquad t_2 \ldots y - 0 = 4(x - 0) \Longrightarrow y = 4x,$$
$$n_1 \ldots y - 0 = -\frac{1}{-4}(x+2) \Longrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \quad n_2 \ldots y - 0 = \frac{-1}{4}(x - 0) \Longrightarrow y = -\frac{1}{4}x.$$

Pomoću formule za tangens kuta između krivulja dobivamo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{4+4}{1 + 4\cdot(-4)}\right| = \left|\frac{8}{1-16}\right| = \frac{8}{15} \Longrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}.$$

□

Zadatak 3.18. Odredite jednadžbe tangente i normale na krivulju $y = \ln(\cos x) + 1$ u točki $x_0 = 0$.

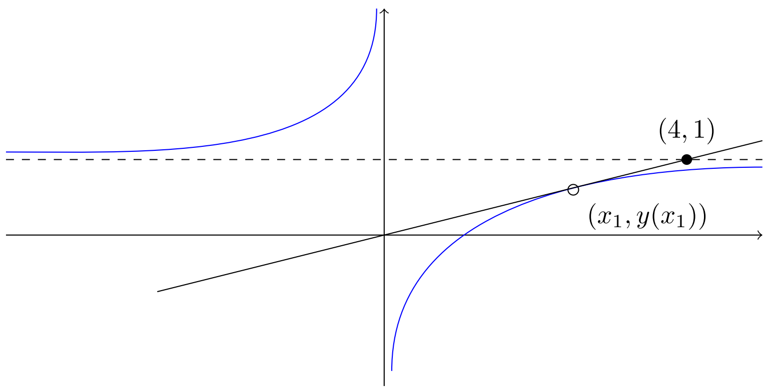
Rješenje. Ovu krivulju ne znamo skicirati, ali svejedno možemo riješiti zadatak. Prirodna domena je $\mathcal{D}_y = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ (odnosno tamo gdje je kosinus pozitivan). Vrijedi da je $x_0 \in \mathcal{D}_y$ i $y(x_0) = \ln(\cos 0) + 1 = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$. Također, $y'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg} x$ te $y'(x_0) = -\operatorname{tg} 0 = 0$. Sada možemo odrediti jednadžbe tangente i normale koje se traže u zadatku:

$$t \ldots y - 1 = 0(x - 0) \Longrightarrow y = 1 \quad \text{i} \quad n \ldots 0(y - 1) = -(x - 0) \Longrightarrow x = 0.$$

□

Zadatak 3.19. Iz točke $(4, 1)$ povucite tangentu na krivulju $y = \frac{x-1}{x}$ i odredite diralište.

Rješenje. Promotrimo skicu funkcije.



Primijetimo da točka $(4, 1)$ ne leži na krivulji (to možemo provjeriti uvrštavanjem $x = 4$ u jednadžbu krivulje iz čega dobijemo $y = \frac{3}{4} \neq 1$). Želimo provući tangentu na krivulju kroz $(4, 1)$. Označimo sa $(x_1, y(x_1))$ diralište tangente i krivulje. Tada jednadžba tangente glasi $t \ldots y - y(x_1) = y'(x_1)(x - x_1)$. Ako u tu jednadžbu uvrstimo da je $y'(x) = \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, dobivamo da je jednadžba tangente dana s

$$t \ldots y - \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{1}{{x_1}^2}(x - x_1).$$

Znamo da, iz uvjeta zadatka, točka $(4, 1)$ mora pripadati tangenti t, odnosno mora zadovoljavati jednadžbu te tangente (ako ju uvrstimo umjesto x i y). Dakle,

$$1 - \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{1}{{x_1}^2}(4 - x_1) \;/\cdot {x_1}^2 \Longrightarrow {x_1}^2 - {x_1}^2 + x_1 = 4 - x_1$$
$$\Longrightarrow 2x_1 = 4 \Longrightarrow x_1 = 2,\; y(x_1) = \frac{1}{2}.$$

Slijedi da je diralište točka $(2, \frac{1}{2})$, a tangenta na krivulju y u toj točki glasi

$$t \ldots y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 2) \Longrightarrow y = \frac{1}{4}x.$$

□

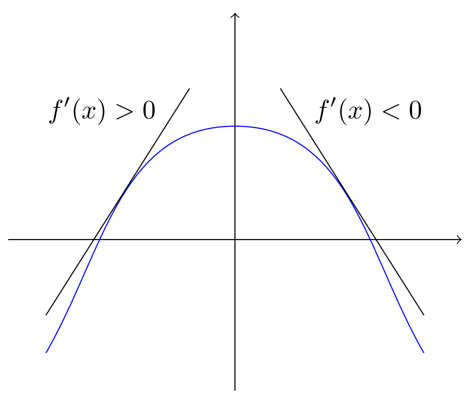
3.4. Monotonost i geometrijski ekstremi

Intervali monotonosti

Zanimaju nas intervali unutar domene funkcije na kojima ona raste, odnosno pada. Vrijedi:

- Funkcija f **raste** tamo gdje je $f'(x) \geq 0$.
- Funkcija f **pada** tamo gdje je $f'(x) \leq 0$.
- Funkcija f **strogo raste** tamo gdje je $f'(x) > 0$.
- Funkcija f **strogo pada** tamo gdje je $f'(x) < 0$.

Na skici vidimo da je predznak derivacije zapravo nagib tangente na graf funkcije (točnije, ako je prva derivacija u nekoj točki pozitivna, tada je tangenta na graf funkcije u toj točki rastuća jer ima pozitivan koeficijent smjera, i obratno).

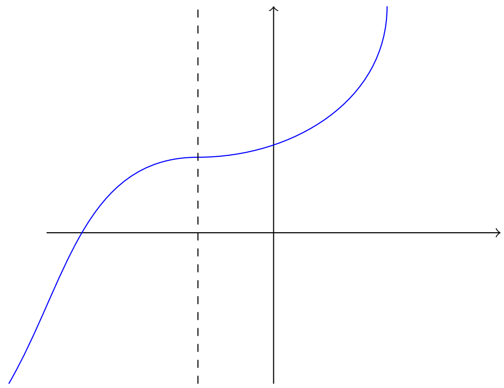


Intervali zakrivljenosti

Slično kao kod intervala monotonosti imamo:

- Funkcija f je **konveksna** tamo gdje je $f''(x) \geq 0$.
- Funkcija f je **konkavna** tamo gdje je $f''(x) \leq 0$.
- Funkcija f je **strogo konveksna** tamo gdje je $f''(x) > 0$.
- Funkcija f je **strogo konkavna** tamo gdje je $f''(x) < 0$.

Promotrimo funkciju na skici. Ona cijelo vrijeme raste, ali vidimo promjenu u ponašanju funkcije u odnosu na vertikalnu isprekidanu crtu. Do te crte funkcija je konkavna; ona smanjuje (usporava) svoj rast, graf funkcije se nalazi „ispod" tangenata na tu funkciju te se nagibi tangenata smanjuju (odnosno f' pada, dakle, po pravilima koja smo napisali za monotonost funkcije, $f'' < 0$). S druge strane, nakon isprekidane crte funkcija je konveksna; povećava svoj rast, njezin graf se sada nalazi „iznad" tangenata te nagibi tih tangenata rastu (odnosno, f' raste, dakle $f'' > 0$).



Zanimaju nas i prijelazne točke između rasta i pada te između konveksnosti i konkavnosti funkcije.

Ekstremi (minimum i maksimum)

- Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda f ima **lokalni maksimum** u c.
- Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda f ima **lokalni minimum** u c.

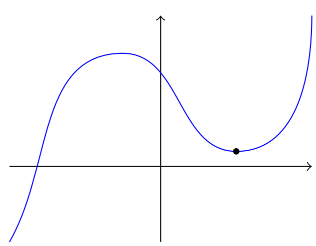
Točke infleksije (prijelazne točke zakrivljenosti funkcije)

- Ako je $f''(c) = 0$ i $f'''(c) \neq 0$, onda je c **točka infleksije** od f.

Napomena 3.9.

1. Ako je $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$, $f'''(c) = 0$, $\dots$, $f^{(n-1)}(c) = 0$ te $f^{(n)}(c) \neq 0$ i ako je n paran broj, onda je c točka ekstrema funkcije f, a ako je n neparan broj, onda je c točka infleksije od f. Ako je $f^{(n)}(c) = 0$ za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$, tada je f konstanta pa je c i točka ekstrema i točka infleksije od f.

2. Kako odrediti **globalni minimum/maksimum** neke funkcije? Primjerice, na sljedećoj skici vidimo da funkcija ima tangentu s nagibom 0 u $x = 1$, odnosno $f'(1) = 0$, dakle f u 1 ima lokalni minimum, ali to očito nije globalni minimum funkcije.



Kada određujemo globalne ekstreme, promatramo sljedeće kandidate:

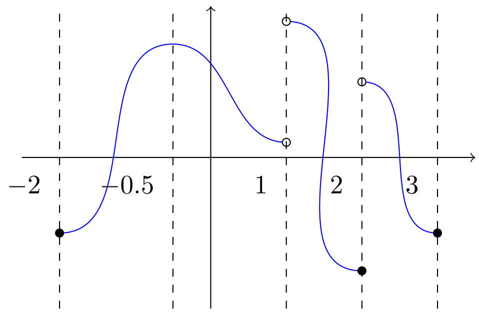
(a) lokalni ekstremi (npr. $f'(c) = 0$ i $f''(c) \neq 0$),

(b) „rupe”, odnosno prekidi u domeni,

(c) točke prekida funkcije,

(d) rubovi domene.

Vidimo na primjeru sljedeće funkcije popisane sve kandidate za globalne ekstreme (te da derivacija ne bi detektirala kandidate (b)–(d)).



Kandidati za globalne ekstreme:

(a) lokalni ekstremi: $x = -0.5$,

(b) „rupe” u domeni: $x = 1$,

(c) prekidi: $x = 2$,

(d) rubovi domene: $x = 4$, $x = 15$.

Zadatak 3.20. Odredite intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale zakrivljenosti i točke infleksije krivulje $y = x^2e^{-x}$.

Rješenje. Potrebne su nam prve tri derivacije od $y = x^2e^{-x}$:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x),$$
$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}\left(2 - 4x + x^2\right) = e^{-x}\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right),$$
$$y''' = -e^{-x}\left(2 - 4x + x^2\right) + e^{-x}(-4 + 2x) = e^{-x}\left(-6 + 6x - x^2\right).$$

Odredimo prvo intervale monotonosti koristeći prvu derivaciju:

	$-\infty$ do 0	0 do 2	2 do $+\infty$
y'	-	+	-
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Dakle, y raste na $\langle 0, 2\rangle$ i pada na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$. (Oprez: nije ispravno reći da y pada na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, jer vrijednosti od y na $\langle 2, +\infty\rangle$ ne moraju biti manje od vrijednosti y na $\langle -\infty, 0\rangle$!)

Kandidati za lokalne ekstreme su nultočke prve derivacije $x = 0$ i $x = 2$. Vrijedi $y''(0) = 1 \cdot 2 = 2 > 0$, pa je točka $(0, y(0)) = (0, 0)$ lokalni minimum, te $y''(2) = e^{-2}(2 - 8 + 4) = -2e^{-2} < 0$, pa je točka $\left(2, 4e^{-2}\right)$ lokalni maksimum.

Odredimo sada intervale zakrivljenosti pomoću druge derivacije:

	$-\infty$ do $2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$ do $2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$ do $+\infty$
y''	+	-	+
y	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Odnosno, y je konveksna na $\left\langle -\infty, 2-\sqrt{2}\right\rangle$ i na $\left\langle 2+\sqrt{2}, +\infty\right\rangle$, a konkavna na $\left\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\rangle$. Kandidati za točke infleksije su nultočke druge derivacije, dakle $x = 2-\sqrt{2}$ i $x = 2+\sqrt{2}$. Računamo:

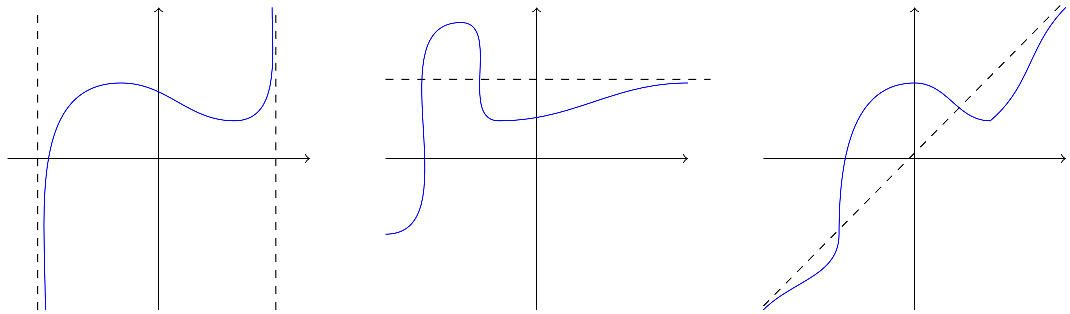
$$y'''\left(2 \pm \sqrt{2}\right) = e^{-2\mp\sqrt{2}}\left(-\left(4 \pm 4\sqrt{2} + 2\right) + 12 \pm 6\sqrt{2} - 6\right) = e^{-2\mp\sqrt{2}}\left(\mp 4\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}\right) =$$
$$= \pm 2\sqrt{2}e^{-2\mp\sqrt{2}} \neq 0.$$

Točke infleksije funkcije y su $\left(2 \pm \sqrt{2}, y\left(2 \pm \sqrt{2}\right)\right) = \left(2 \pm \sqrt{2}, \left(6 \pm 4\sqrt{2}\right)e^{-2\mp\sqrt{2}}\right)$.

□

3.5. Asimptote

Intuitivno, asimptote su pravci prema kojima se funkcija približava, ali ih nikada ne dotakne.



Razlikujemo 3 tipa asimptota:

1. Vertikalne asimptote (oznaka v.a.)

   Pravac $x = x_0$ (paralelan sa y–osi) je vertikalna asimptota funkcije f ako vrijedi

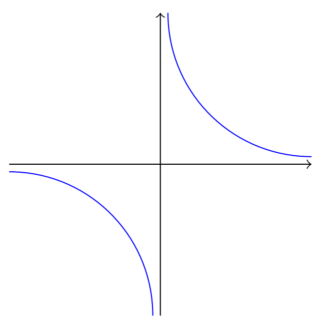
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty.$$

   Kandidati za vertikalne asimptote su pravci $x = x_0$ gdje je x_0 točka prekida („rupa") ili rub intervala. Primjerice:

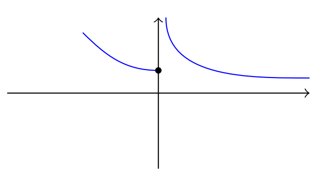
   - $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

     pa je kandidat za v.a. $x = 0$

     $\lim\limits_{x \to 0\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$



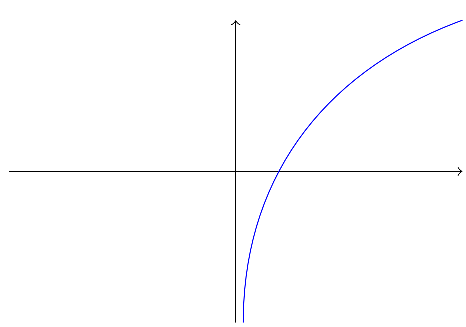
   - Da $x = x_0$ bude vertikalna asimptota nije potrebno da i lijevi i desni limes u x_0 budu $\pm\infty$. Primjerice, na sljedećoj skici je $x = 0$ vertikalna asimptota.



   - $f(x) = \ln x$, $\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty \rangle$

     pa je kandidat za v.a. $x = 0$

     $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$



2. Horizontalne asimptote (oznaka h.a.)

Pravac $y = y_0$ (paralelan sa x–osi) je horizontalna asimptota funkcije f ako je

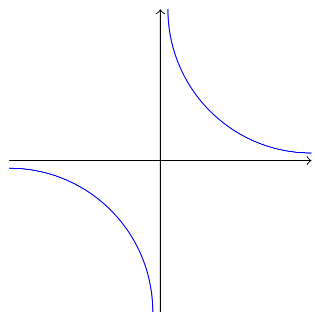
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0.$$

Primjerice:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$

  $y = 0$ je h.a. jer

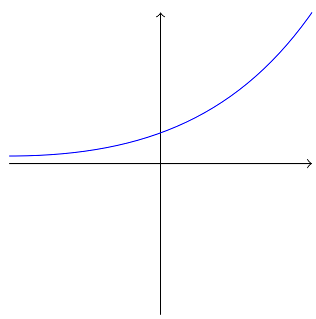
  $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$



- $f(x) = e^x$

  $y = 0$ je h.a. jer

  $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$



3. Kose asimptote (oznaka k.a.)

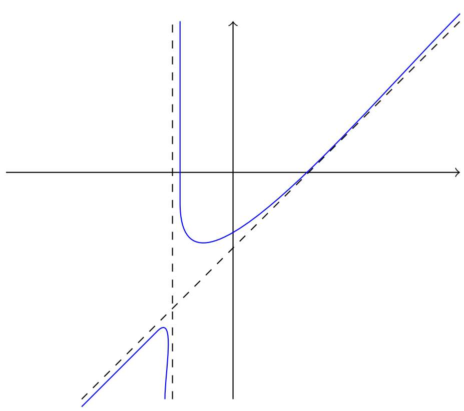
Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota funkcije f ako je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l$$

ili

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Pomoću ovih formula, ako ti limesi postoje, prvo odredimo koeficijent k i zatim l. Bitno je napomenuti da je $k \neq \pm\infty$, $l \neq \pm\infty$ te $k \neq 0$ (posljednji uvjet je tu kako bi razdvojili kose asimptote od horizontalnih). Kao primjer promotrimo funkciju $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.



$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1 \neq 0$$

$$l = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x}{x+1} \right) = -1$$

$\Longrightarrow$ k.a. $y = x - 1$.

Napomena 3.10. Ako postoji horizontalna asimptota u nekoj beskonačnosti (u $+\infty$ ili u $-\infty$), onda tamo ne postoji kosa asimptota (i obrnuto).

3.6. Tok funkcije

Kroz sljedećih osam točaka promatramo kako se funkcija ponaša u cjelosti:

1. prirodna domena funkcije,
2. nultočke,
3. asimptote (prvo vertikalne, pa horizontalne, te ako nema horizontalnih, onda kose),
4. ekstremi,
5. intervali monotonosti,
6. točke infleksije,
7. intervali zakrivljenosti,
8. graf funkcije (crtamo otprilike, na temelju 1.–7.)

Zadatak 3.21. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

Rješenje. 1. Prirodna domena: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Nultočke: $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \dfrac{2}{x} = 0 \;/\cdot x \Longleftrightarrow x^3 + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$.

3. Asimptote:

   - vertikalne asimptote
     Kandidati (rubovi i prekidi): 0.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = [0 - \infty] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = [0 + \infty] = +\infty,$$

     $\Longrightarrow x = 0$ je vertikalna asimptota.

   - horizontalne asimptote

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = [+\infty + 0] = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$$

     $\Longrightarrow$ nema horizontalnih asimptota.

- kose asimptote

  Budući da f niti s jedne strane nema horizontalnih asimptota, provjeravamo ima li kosu asimptotu s obje strane.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x^2}\right)=+\infty,$$

  $\Longrightarrow$ nema kosih asimptota.

4. Za traženje ekstrema potrebne su nam prva i druga derivacija od f:

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2},$$
$$f''(x)=2+\frac{4}{x^3}.$$

$$f'(x)=0\Longleftrightarrow 2x-\frac{2}{x^2}=0\ /\cdot x^2\Longleftrightarrow 2x^3-2=0\Longleftrightarrow x^3=1\Longleftrightarrow x=1.$$

   Dakle, kandidat za lokalni ekstrem je $x=1$. Provjeravamo s drugom derivacijom: $f''(1)=6>0$, pa je $(1,3)$ lokalni minimum.

5. Prilikom određivanja intervala monotonosti potrebna nam je prva derivacija.

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

   $\Longrightarrow$ f pada na $\langle-\infty,0\rangle$ i na $\langle 0,1\rangle$, a raste na $\langle 1,+\infty\rangle$.

6. Za određivanje točaka infleksije potrebne su nam druga i treća derivacija:

$$f''(x)=2+\frac{4}{x^3},$$
$$f'''(x)=-\frac{12}{x^4}.$$

   Računamo:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow 2+\frac{4}{x^3}=0\Longleftrightarrow 2x^3+4=0\Longleftrightarrow x^3=-2\Longleftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}.$$

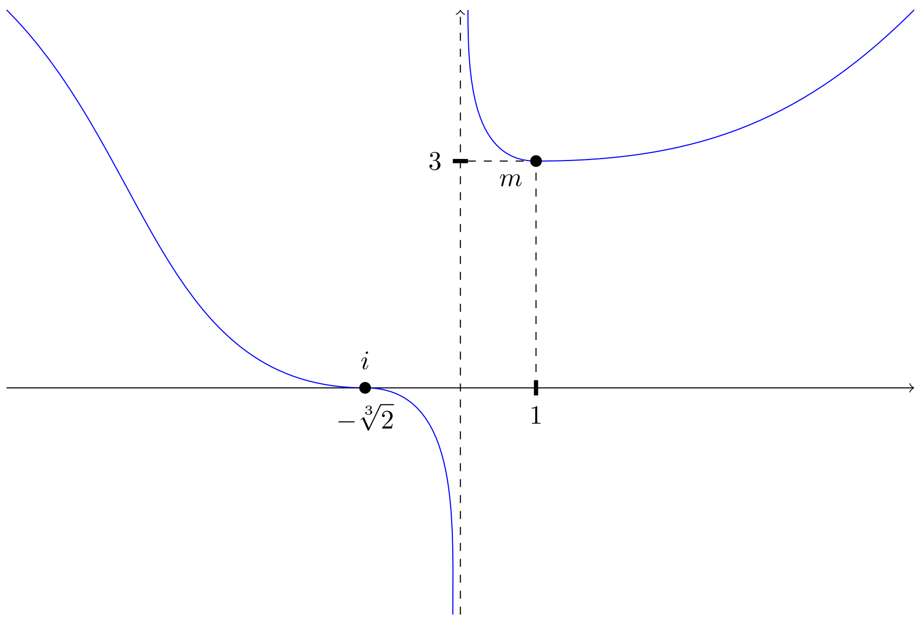
   Jedini kandidat za točku infleksije je $x=-\sqrt[3]{2}$. Provjerimo $f'''\left(-\sqrt[3]{2}\right)=-\frac{12}{\sqrt[3]{2}}^{\,4}\neq 0$, dakle $\left(-\sqrt[3]{2},f\left(-\sqrt[3]{2}\right)\right)=\left(-\sqrt[3]{2},0\right)$ je točka infleksije.

7. Nađimo intervale zakrivljenosti pomoću druge derivacije od f:

	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$	

   $\Longrightarrow$ f je konveksna na $\left\langle-\infty,-\sqrt[3]{2}\right\rangle$ i na $\langle 0,+\infty\rangle$, a konkavna na $\left\langle-\sqrt[3]{2},0\right\rangle$.

8. Graf funkcije f skiciramo koristeći redom zaključke iz koraka 1.–7. Prvo naznačavamo ključne točke (nultočke, lokalne ekstreme, točke infleksije) te crtama označavamo asimptote i kako se funkcija ponaša oko njih. Naposljetku unosimo rast/pad funkcije te konveksnost/konkavnost. Na skici nam nije važno da za svaku točku na x–osi ucrtamo točnu vrijednost funkcije na y–osi, nego da iz skice vidimo kako otprilike izgleda tok funkcije. Korisno nam je i pogledati limes funkcije u beskonačnostima (što smo računali prilikom traženja horizontalnih asimptota) kako bi znali kako započeti i završiti crtanje grafa.



$\square$

Zadatak 3.22. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (1-x)e^{-x}$.

Rješenje.

1. Prirodna domena: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Nultočke: $f(x) = 0 \iff (1-x)e^{-x} = 0 \iff 1-x = 0 \iff x = 1 \quad \implies (1,0)$ je nultočka od f.

3. Asimptote:

   - vertikalne asimptote

     Nemamo kandidata za vertikalne asimptote jer ne postoje rupe u domeni niti domena ima rubove koji su realni brojevi. Dakle, f nema vertikalnih asimptota.

   - horizontalne asimptote

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^{-x} = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{-x} = [-\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = 0.$$

     Dobivamo da je $y = 0$ horizontalna asimptota u $+\infty$.

- kose asimptote

  Budući da f ima horizontalnu asimptotu u $+\infty$, znamo da tamo sigurno nema kosu asimptotu pa kosu asimptotu tražimo samo za limes u $-\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)e^{-x}}{x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}-(1-x)e^{-x}}{1} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(-1-1+x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x-2) = [+\infty\cdot(-\infty)] = -\infty,$$

  dakle f nema kosu asimptotu u $-\infty$.

4. Lokalni ekstremi:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(x-2),\\
f''(x) &= -e^{-x}(x-2) + e^{-x} = e^{-x}(-x+3),\\
f'(x) &= 0 \Longleftrightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \quad \Longrightarrow \text{jedini kandidat},\\
f''(2) &= e^{-2}\cdot 1 > 0 \quad \Longrightarrow (2, f(2)) = \left(2, -e^{-2}\right) \text{ je lokalni minimum funkcije } f.
\end{aligned}$$

5. Intervali monotonosti:

	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

$\Longrightarrow$ f pada na $\langle -\infty, 2\rangle$ i raste na $\langle 2, +\infty\rangle$.

6. Točke infleksije:

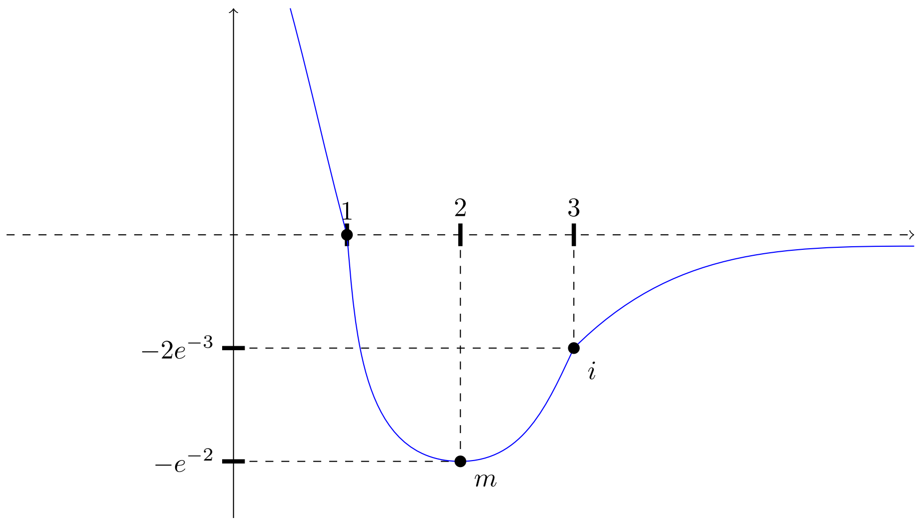
$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -e^{-x}(-x+3) - e^{-x} = e^{-x}(x-4),\\
f''(x) &= 0 \Longleftrightarrow e^{-x}(-x+3) = 0 \Longleftrightarrow x = 3 \quad \Longrightarrow \text{ kandidat za točku infleksije},\\
f'''(3) &= e^{-3}(-1) \neq 0 \quad \Longrightarrow (3, f(3)) = \left(3, -2e^{-3}\right) \text{ je točka infleksije funkcije } f.
\end{aligned}$$

7. Intervali zakrivljenosti:

	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	

$\Longrightarrow$ f je konveksna na $\langle -\infty, 3\rangle$ i konkavna na $\langle 3, +\infty\rangle$.

8. Graf:



□

Zadatak 3.23. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x}}$.

Rješenje. 1. Prirodna domena: uvjeti $\sqrt{x} \neq 0$, $x \geq 0$ i $2x > 0$. Dakle, $\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty \rangle$.

2. Nultočke: $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = 0 \ / \cdot \sqrt{x} \Longleftrightarrow \ln 2x = 0 \Longleftrightarrow 2x = e^0 \Longleftrightarrow 2x = 1 \Longleftrightarrow$ $x = \dfrac{1}{2}$. Nultočka je $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

3. Asimptote:

- vertikalne asimptote

  Ne postoje rupe u domeni pa je jedini kandidat za vertikalnu asimptotu rub intervala 0. Računamo samo limes zdesna (jer ln nije dobro definiran za brojeve manje od 0): $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \left[\dfrac{-\infty}{0+}\right] = -\infty$. Vertikalna asimptota je $x = 0$.

- horizontalne asimptote

  Budući da nemamo domenu koja ide u $-\infty$, sigurno nemamo niti horizontalnu niti kosu asimptotu u $-\infty$ pa je dovoljno samo provjeravati limes u $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2x^{\frac{1}{2}}x^{-1} = \lim_{x\to+\infty} 2x^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0.$$

  Horizontalna asimptota je $y = 0$.

- kose asimptote

  Budući da f u $+\infty$ ima horizontalnu asimptotu, f nema kosih asimptota.

4. Lokalni ekstremi:

$$f'(x) = \frac{2 - \ln 2x}{2x^{\frac{3}{2}}},$$
$$f''(x) = \frac{-8 + 3\ln 2x}{4x^{\frac{5}{2}}},$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{2 - \ln 2x}{2x^{\frac{3}{2}}} = 0 \Longleftrightarrow 2 - \ln 2x = 0 \Longleftrightarrow \ln 2x = 2 \Longleftrightarrow 2x = e^2 \Longleftrightarrow x = \frac{e^2}{2},$$
$$f''\left(\frac{e^2}{2}\right) = -\frac{2}{\frac{4e^5}{2^{\frac{5}{2}}}} < 0,$$

$$\Longrightarrow f \text{ u } \left(\frac{e^2}{2}, f\left(\frac{e^2}{2}\right)\right) = \left(\frac{e^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{e}\right) \text{ ima lokalni maksimum.}$$

5. Intervali monotonosti:

	0	$\frac{e^2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

$\Longrightarrow$ f raste na $\left\langle 0, \frac{e^2}{2} \right\rangle$ i pada na $\left\langle \frac{e^2}{2}, +\infty \right\rangle$.

6. Točke infleksije:

$$f'''(x) = \frac{46 - 15\ln 2x}{8x^{\frac{7}{2}}},$$
$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -8 + 3\ln 2x = 0 \Longleftrightarrow \ln 2x = \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{e^{\frac{8}{3}}}{2},$$
$$f'''\left(\frac{e^{\frac{8}{3}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{28}{3}}} \neq 0,$$

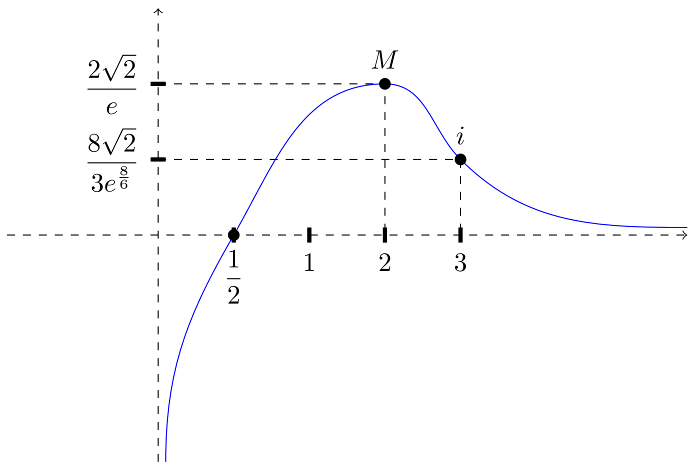
$$\Longrightarrow \left(\frac{e^{\frac{8}{3}}}{2}, \frac{8\sqrt{2}}{3e^{\frac{8}{6}}}\right) \text{ je točka infleksije od f.}$$

7. Intervali zakrivljenosti:

	0	$\frac{e^{\frac{8}{3}}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	

$\Longrightarrow$ f je konkavna na $\left\langle 0, \frac{e^{\frac{8}{3}}}{2} \right\rangle$ i konveksna na $\left\langle \frac{e^{\frac{8}{3}}}{2}, +\infty \right\rangle$.

8. Graf:



□

3.7. Integrali

1. Neodređeni integral

Naučili smo kako od f dobiti njenu derivaciju f'. Sada nas zanima možemo li raditi obrnuto: ako dobijemo neku funkciju g, znamo li koja funkcija h će derivirana dati g, odnosno $h' = g$. Primjerice, koja funkcija kada ju deriviramo daje $g(x) = x$? Odgovor je $h(x) = \frac{x^2}{2}$ jer $h'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = g(x)$. Ovaj postupak naziva se **integriranje**.

Integral funkcije f je svaka funkcija F takva da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$. Oznaka je $F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, gdje sa $\mathrm{d}x$ označavamo po kojoj varijabli integriramo (korisno ako recimo imamo funkciju koja ovisi o više varijabli, pr. x^2y). Funkciju F zovemo **primitivna funkcija** od f.

Promotrimo primjer funkcije $f(x) = 2x$. Vidimo da je njena primitivna funkcija $F(x) = x^2$ (jer $\left(x^2\right)' = 2x$). Ali to nije jedina takva funkcija! Primijetimo da za $F_2(x) = x^2 - 1$ također vrijedi $F_2'(x) = f(x)$. Možemo uzeti recimo i $F_3(x) = x^2 + 3$. Zapravo, za svaku $F_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ konstanta, vrijedi da je $F_c'(x) = f(x)$. Zapravo je tada

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}, F \text{ primitivna od } f\}.$$

Vrijedi

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int (\alpha f(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

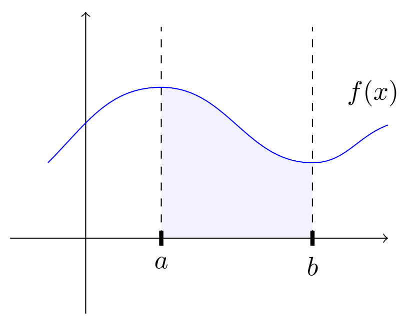
(Ove jednakosti slijede iz činjenica $(F \pm G)' = F' \pm G'$ i $(\alpha F)' = \alpha F'$.)

Tablica integrala

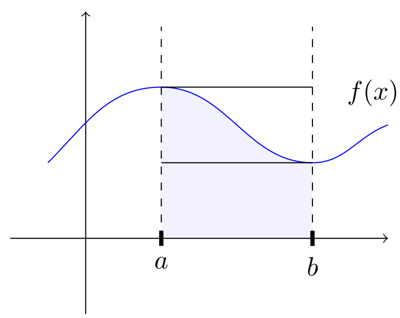
$$\int \mathrm{d}x = x + c$$
$$\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$
$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c \qquad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

2. Određeni integral

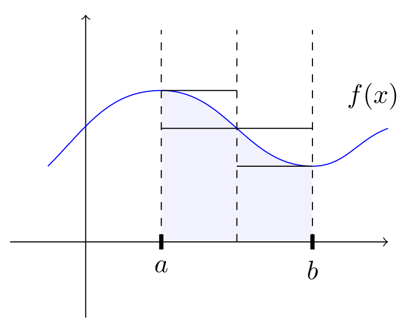
Zanima nas površina ispod grafa neke funkcije, recimo na desnoj skici osjenčana površina između točaka $x = a$ i $x = b$ i ispod grafa funkcije f. Znamo formulu za površinu pravokutnika. Možemo traženu površinu odozdo ograničiti manjim pravokutnikom, a odozgo većim i tada znamo da se tražena površina nalazi između površina manjeg i većeg pravokutnika.



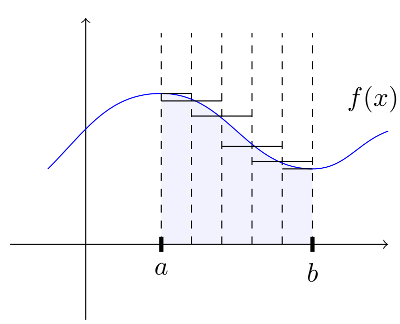
Na skici lijevo vidimo kako smo traženu površinu odozdo i odozgo ograničili površinama pravokutnika. Međutim, vidimo da se te tri površine dosta razlikuju.



Ako segment $[a, b]$ podijelimo na dva dijela i ponovo površinu ispod grafa funkcije aproksimiramo površinama pravokutnika odozdo i odozgo, vidimo da smo sada dobili bolju aproksimaciju.



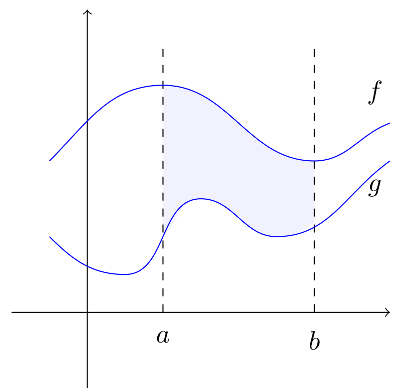
Tako možemo nastaviti dalje, dijelimo segment $[a, b]$ na sve manje i manje dijelove (i tako u beskonačnost) i u svakom koraku dobivamo sve bolju i bolju aproksimaciju površine ispod grafa s površinama pravokutnika.



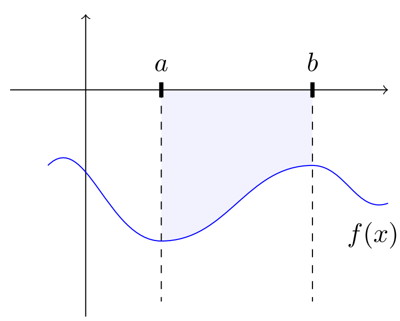
Ako se vrijednosti površina svih pravokutnika koji odozdo aproksimiraju površinu ispod grafa funkcije i vrijednosti površina svih pravokutnika koji odozgo aproksimiraju površinu ispod grafa funkcije prilikom smanjivanja veličine podsegmenata od $[a, b]$ (odnosno prilikom povećavanja broja dijelova na koje dijelimo segment $[a, b]$) približavaju istom broju, odnosno ako postoje njihovi limesi i jednaki su, tada taj broj nazivamo integralom funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označavamo sa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Kako računamo tu vrijednost? Pomoću tablice integrala i **Newton–Leibnizove formule** koja kaže

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

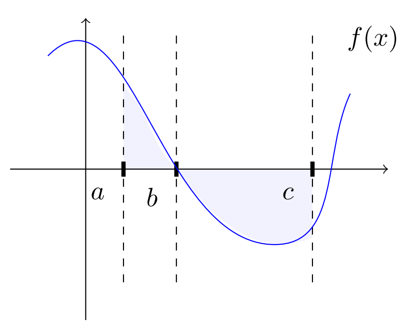
Općenitije, možemo računati površinu između dvije krivulje (kao na skici desno) formulom $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.



Ako želimo izračunati površinu ispod $x-$*osi* koja je omeđena odozdo grafom neke funkcije f (kao na slici desno), onda površinu računamo formulom $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.



Konačno, ako imamo neku „složeniju” površinu za izračunati, kao na primjeru desno, onda možemo kombinirati računanje po dijelovima segmenta. Tako bi osjenčana površina s desne skice iznosila $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, što možemo jednostavnije zapisati kao $\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



Zadatak 3.24. Odredite sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$,

(d) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$.

Rješenje. U ovim zadacima nam je cilj dobivenu funkciju raspisati tako da dobijemo funkciju koju znamo integrirati (pomoću tablice).

(a)

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - x^{-2}\right) x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \int x^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + c.$$

Dovoljno je samo jednom dodati konstantu c, bez obzira na to koliko integrala imamo (dodajemo ju u trenutku kada se riješimo zadnjeg integrala).

(b)

$$\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2^x}{10^x} + \frac{5^x}{10^x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{10}\right)^x \mathrm{d}x + \int \left(\frac{5}{10}\right)^x \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{1}{5}\right)^x \mathrm{d}x + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + c = -\frac{5^{-x}}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + c.$$

(c)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x + c,$$

gdje smo u drugoj jednakosti upotrijebili identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(d)

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{tg}\, x - \int 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

□

Zadatak 3.25. Odredite sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x - a}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Rješenje. Integrale u ovom zadatku rješavamo pomoću supstitucije.

(a)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \begin{bmatrix} \text{supstitucija :} & t = x-a \\ & \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-a| + c.$$

Prilikom rješavanja integrala supstitucijom, ne smijemo na kraju zaboraviti zapisati rješenje u terminu početnih varijabli, odnosno vratiti supstituciju.

(b)

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{supstitucija :}\ t = x^{\frac{1}{3}} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int 3\sin t\,\mathrm{d}t = 3\int \sin t\,\mathrm{d}t = -3\cos t + c =$$

$$= -3\cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + c.$$

(c)

$$\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{supstitucija :}\ t = 1+2\sin x \\ \mathrm{d}t = 2\cos x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{\ln|1+2\sin x|}{2} + c.$$

□

Zadatak 3.26. Odredite sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Rješenje. Integrale ćemo riješiti metodom parcijalne integracije koja ukratko kaže da za funkcije u i v koje ovise o x vrijedi $\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u$.

(a)

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c.$$

(b)

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}v = 1\cdot\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

(c)

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \sin x & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos x & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x & v = e^x \end{bmatrix} = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int -e^x\sin x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Uočimo da i s lijeve i s desne strane jednakosti imamo isti član $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$. Grupirajmo taj član s jedne strane jednakosti i ono što je ostalo s druge. Dobivamo

$$2 \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - e^x \cos x + c,$$

odnosno

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

□

Zadatak 3.27. Odredite sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3+2x)^2}$, (c) $\displaystyle\int_0^{a-1} \ln(x+1) \, \mathrm{d}x$.

Rješenje. Slično kao i u zadacima s neodređenim integralom, prvo integriramo funkciju svođenjem na neku od tabličnih funkcija, metodom supstitucije ili metodom integracije te zatim uvrstimo rubove intervala kako bi dobili traženu vrijednost pomoću Newton–Leibnizove formule.

(a)

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{supstitucije :} & u = x+2,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = x+1,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ & 1 \mapsto 3, 0 \mapsto 2 & 1 \mapsto 2, 0 \mapsto 1 \end{bmatrix} =$$

$$2 \int_2^3 \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u - \int_1^2 \frac{1}{v} \, \mathrm{d}v = 2 (\ln |u|) \Big|_2^3 - (\ln |v|) \Big|_1^2 = 2 (\ln 3 - \ln 2) - (\ln 2 - \ln 1) =$$

$$= 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \ln 1 = 2 \ln 3 - 3 \ln 2.$$

Primijetimo da prilikom računanja određenog integrala nije potrebno dodavati konstantu na kraju, jer se ona pokrati prilikom uvrštavanja dvije granice integriranja u Newton–Leibnizovoj formuli. Također, prilikom uvođenja supstitucije potrebno je promijeniti i granice intervala u skladu sa supstitucijom.

(b)

$$\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3+2x)^2} = \begin{bmatrix} \text{supstitucija :} & u = 3+2x,\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ & -1 \mapsto 1, 2 \mapsto 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int_1^7 \frac{1}{u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_1^7 u^{-2} \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-u^{-1} \right) \Big|_1^7 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7}.$$

(c)

$$\int_{0}^{a-1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{supstitucija}: & u = x+1,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ & 0 \mapsto 1, a-1 \mapsto a \end{bmatrix} = \int_{1}^{a} \ln u\,\mathrm{d}u \overset{\text{zad.26.}b)}{=}$$

$$= \left(u\,(\ln u - 1)\right)\Big|_{1}^{a} = a\,(\ln a - 1) - 1\,(\ln 1 - 1) = a\ln a - a - 1(0-1) = a\ln a - a + 1.$$

$\square$