

# Linearna algebra

DARKO ŽUBRINIĆ

Cilj ovog teksta je olakšati praćenje kolegija Linearne algebre onim studentima postdiplomskog studija FER-a koji nisu odslušali kolegij Linearne algebre u prvom semestru dodiplomskog studija (vidi knjigu Nevena Elezovića i njegovu zbirku s Andrejom Aglič). Dobro će doći i onima koji su ga odslušali kao malo ponavljanje. U tekstu su mjestimice uključena i neka proširenja. Svladavanje ovog uvodnog gradiva je nuždan, ali ne i dovoljan uvjet da bi se položio ispit iz Linearne algebre na postdiplomskom studiju FER-a.

Zagreb, prosinca 2002.

## Sadržaj:

1. Osnovni pojmovi i rezultati linearne algebre
  - 1.1 Grupe i polja
  - 1.2 Vektorski prostori
  - 1.3 Unitarni vektorski prostori
  - 1.4 Normirani vektorski prostori
  - 1.5 Matrice i determinante
  - 1.6 Linearni operatori
  - 1.7 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori
  - 1.8 Hahn-Banachov teorem i Fredholmova alternativa
  - 1.9 Crtice iz povijesti linearne algebre
2. Rješavanje sustava jednačaba iterativnim metodama
  - 1.1 Matrične norme i konvergencija matrica

## Literatura:

1. Neven Elezović: *Linearna algebra*, Element, Zagreb
2. Andrea Aglič, Neven Elezović: *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Element, Zagreb
3. Svetozar Kurepa: *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Školska knjiga, Zagreb
4. Za izvore na webu vidi [www2.zpm.fer.hr/darko/darko.html](http://www2.zpm.fer.hr/darko/darko.html)

## Oznake:

Skupove prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva označavamo sa  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ . Važnije tvrdnje pišemo kosim slovima.

# 1.

## UVOD

### 1.1. Grupe i polja

Pojam vektorskog prostora predstavlja prirodno proširenje raznih prostora koji se s obzirom na zbrajanje i množenje sa skalarom ponašaju na potpuno isti način. Takvi su npr.  $\mathbf{R}^n$  (prostor vektora stupaca s  $n$  komponenta),  $V^3$  (prostor klasičnih vektora dobiven preko usmjerenih dužina),  $M_{mn}$  (vektorski prostor matrica tipa  $m \times n$ ). Cilj je unijeti geometriju i općenito zor u vektorske prostore koji su naoko bez geometrije (npr. u prostoru funkcija). Opća definicija vektorskog prostora zasniva se na pojmu grupe i polja, koji su također predmet samostalnog proučavanja u matematici.

**Grupa** je neprazan skup  $G$  zajedno s binarnom operacijom  $\cdot$ , kojom dvama elementima  $x$  i  $y$  iz  $G$  pridružujemo element  $x \cdot y$  u  $G$ , tako da vrijedi

- a)  $x(yz) = (xy)z$  za sve  $x, y, z \in G$  (asocijativnost);
- b) postoji element  $e \in G$  tako da za sve  $x \in G$  vrijedi  $xe = ex = x$ ;  $e$  zovemo neutralnim elementom;
- c) za svaki  $x \in G$  postoji element  $x^{-1}$  takav da je  $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ .

Kraće govorimo o grupi kao o poredanom dvojcu  $(G, \cdot)$  s gornjim svojstvima. Ako vrijedi još i

- d)  $xy = yx$  za sve  $x, y \in G$ ,

za grupu kažemo da je komutativna ili abelova (u čast norveškog matematičara Nielsu Abelu iz 19. st.).

Ako je binarna operacija zapisana aditivno, tj. sa  $+$  umjesto  $\cdot$ , onda smatramo da je grupa automatski komutativna. Inverzni element u aditivnoj grupi zovemo suprotnim elementom i označavamo s  $-x$ , a neutralni element zovemo nul-elementom i označavamo s  $0$ .

**Polje** je skup  $F$  zajedno s dvije binarne operacije  $+$  (zbrajanje) i  $\cdot$  (množenje), koje bilo kojim dvama elementima  $\lambda, \mu \in F$  pridružuje  $\lambda + \mu \in F$  i  $\lambda \cdot \mu \in F$ , tako da vrijedi:

- a)  $(F, +)$  je aditivna grupa, tj.
  - a1)  $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$  za sve  $\lambda, \mu, \nu \in F$  (asocijativnost);

- a2) postoji element  $0 \in F$  tako da za sve  $\lambda \in F$  vrijedi  $\lambda + 0 = 0 + \lambda = \lambda$ ; 0 zovemo neutralnim elementom;
- a3) za svaki  $\lambda \in F$  postoji element  $-\lambda$  takav da je  $-\lambda + \lambda = \lambda + (-\lambda) = 0$ ;
- a4)  $\lambda + \mu = \mu + \lambda$  za sve  $\lambda, \mu \in F$ ,
- b) Skup  $F^* := F \setminus \{0\}$  (skup svih ne-nul elemenata u  $F$ ) je komutativna grupa s obzirom na množenje.
- c) Operacije zbrajanja i množenja su usklađene zakonom distribucije:  $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$ .

Kažemo kraće da je polje poredani trojac  $(F, +, \cdot)$  skupa  $F$  i binarnih operacija zbrajanja i množenja na  $F$  s gornjim svojstvima. Ako su poznate operacije koje se odnose na polje, onda ga kratko označavamo samo s  $F$ .

Neki od temeljnih primjera su polje realnih brojeva  $\mathbf{R}$ , polje kompleksnih brojeva  $\mathbf{C}$ , s kojima ćemo najčešće raditi. Moguća su i konačna polja, tj. polja s konačno mnogo elemenata, npr.  $\mathbf{Z}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ , sa zbrajanjem i množenjem po modulu  $p$ , gdje je  $p$  prost broj. Ovdje najprije računamo zbroj (umnožak) na uobičajen način, a onda njegov ostatak pri dijeljenju s  $p$ . Npr. u  $\mathbf{Z}_2$  je  $1 + 1 = 0$ , tj.  $-1 = 1$ . U  $\mathbf{Z}_3$  je  $1 + 2 = 0$ , tj.  $-1 = 2$ , a  $2 \cdot 2 = 1$ , tj.  $2^{-1} = 2$ .

Skup cijelih brojeva  $\mathbf{Z}$  je aditivna grupa, ali nije multiplikativna grupa, pa prema tome niti polje.

## 1.2. Vektorski prostori

Elemente nekog polja  $F$  (kod nas najčešće  $\mathbf{R}$  ili  $\mathbf{C}$ ) zvat ćemo **skalarima**. Skalar je dakle drugi naziv za “broj”. Uvedimo sada jednu od temeljnih struktura u linearnoj algebri.

**Vektorski prostor** nad zadanim poljem  $F$  je skup  $X$  zajedno s dvije operacije:

- 1) binarnom operacijom zbrajanja  $+$  u  $X$ ,
- 2) operacijom  $\cdot$  kojom bilo kojem skalaru  $\lambda \in F$  i elementu (vektoru)  $x \in X$  pridružujemo  $\lambda x \in X$  (Pažnja! Ovo “množenje” nije isto što i množenje u polju  $F$ ),

tako da vrijedi:

- a)  $(X, +)$  je aditivna grupa (komutativnost podrazumijevamo), elemente od  $X$  zovemo **vektorima**,
- b) usklađenost operacija množenja skalara u polju  $F$  i množenja skalara s vektorima u  $X$ :

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad 1x = x,$$

za sve  $\lambda, \mu \in F$  i  $x \in X$

- c) zakoni distribucije:

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

za sve  $\lambda, \mu \in F$  i  $x, y \in X$ .

Kada govorimo o vektorskom prostoru  $(X, +, \cdot)$ , onda se operacija  $\cdot$  odnosi na

množenje skalara iz  $F$  s vektorima iz  $X$ . Ne zaboravimo da u polju  $F$  imamo operaciju (međusobnog) množenja skalara, koje označavamo na isti način, koje se razlikuje od prethodnog množenja skalara i vektora.

U vektorskom prostoru  $X$  uvodimo **linearnu kombinaciju vektora**  $x_1, \dots, x_k \in X$  kao izraz

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in X.$$

Za vektore  $x_1, \dots, x_k$  kažemo da su **linearno nezavisni** ako vrijedi da

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Zamislimo sve podskupove u  $X$  koji su sastavljeni od linearno nezavisnih vektora (linearno nezavisni podskupovi). Ako postoji prirodan broj  $k$  takav da svaki linearno nezavisan podskup od  $X$  ima broj elemenata koji je  $\leq k$ , onda kažemo da je vektorski prostor  $X$  **konačno-dimenzionalan**. Najmanji takav broj  $k$  zove se **dimenzija** vektorskog prostora  $X$  i označava sa  $\dim X$ . Ako takav prirodan broj  $k$  ne postoji, kažemo da je vektorski prostor  $X$  **beskonačno-dimenzionalan**.

Za vektore  $x_1, \dots, x_k$  iz vektorskog prostora  $X$  kažemo da su **linearno zavisni** ako postoje skalari  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  koji nisu svi nula, takvi da je  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ .

Ako je  $X$  vektorski prostor nad poljem  $F$ , onda neki njegov podskup  $Y$  zovemo **vektorskim potprostorom** ako je  $Y$  vektorski prostor s operacijama  $+$  i  $\cdot$  naslijeđenim iz  $X$ . Kako su sva svojstva vektorskog prostora također naslijeđena na  $Y$ , da bi podskup  $Y$  bio vektorski potprostor treba provjeriti samo ovo:

- a) ako su  $x, y \in Y$ , onda mora biti i  $x + y \in Y$  (zatvorenost skupa  $Y$  s obzirom na zbrajanje vektora)
- b) ako su  $\lambda \in F$  i  $x \in Y$ , mora biti i  $\lambda x \in Y$  (zatvorenost skupa  $Y$  s obzirom na množenje sa skalarima).

Kraće,  $Y$  je vektorski potprostor vektorskog prostora  $X$  ako je zatvoren s obzirom na uzimanje linearnih kombinacija:

$$\lambda, \mu \in F, \quad x, y \in Y \quad \Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in Y.$$

Posebno, svaki potprostor  $Y$  od  $X$  sadrži nul-element  $0$ . Potprostor  $Y$  si obično predočavamo kao podravninu (ili pravac) kroz ishodište  $0$  u  $X$ . Među mogućim potprostorima od  $X$  je i  $Y = \{0\}$ , koji zovemo **nul-potprostorom** od  $X$ . Zovemo ga i nul-dimenzionalnim prostorom. Potprostore od  $X$  koji su različiti od nul-potprostora i  $X$  zovemo **netrivijalnim potprostorima** od  $X$ .

Za odabrane vektore  $x_1, \dots, x_k$  u  $X$  možemo definirati vektorski prostor

$$L(x_1, \dots, x_k)$$

svih linearnih kombinacija vektora  $x_1, \dots, x_k$ . Zove se **prostorom razapetim vektorima**  $x_1, \dots, x_k$ . To je najmanji vektorski potprostor od  $X$  koji sadrži vektore  $x_1, \dots, x_k$ . Dimenzija mu je najviše  $k$ . Za bilo koji  $x_1 \neq 0$  pripadni potprostor  $L(x_1)$  zovemo **pravcem u**  $X$  razapetim vektorom  $x_1$ .

Ako je  $B$  neki podskup vektorskog prostora  $X$ , onda sa  $L(B)$  označavamo skup svih linearnih kombinacija vektora odabranih iz  $B$ . To je najmanji vektorski potprostor od  $X$  koji sadrži skup  $B$ .

Ako u nekom vektorskom prostoru  $X$  postoji podskup  $B \subset X$  takav da je

- a) skup  $B$  linearno nezavisan, što po definiciji znači da je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan,

b) skup  $B$  razapinje cijeli  $X$ , tj.  $L(B) = X$  (drugim riječima, za svaki  $x \in X$  postoji konačan podskup od  $B$  čija linearna kombinacija daje  $x$ ),  
 onda  $B$  zovemo **bazom vektorskog prostora**  $X$ .

Ako je vektorski prostor  $X$  konačno-dimenzijski, onda svake dvije baze u  $X$  imaju isti broj elemenata.

Ako je  $k = \dim X < \infty$ , i skup  $\{x_1, \dots, x_k\}$  linearno nezavisan, onda je  $L(x_1, \dots, x_k) = X$ , tj.  $\{x_1, \dots, x_k\}$  je baza u  $X$ .

Presjek dvaju potprostora u  $X$  je opet potprostor od  $X$ . Za dva potprostora  $E$  i  $F$  od  $X$  možemo definirati **zbroj potprostora**  $E + F$  kao skup svih vektora oblika  $e + f$ , gdje je  $e \in E$  i  $f \in F$ . To je također potprostor od  $X$ . Ako je pritom  $E \cap F = \{0\}$ , onda zbroj takvih prostora zovemo **direktnom sumom potprostora**, i označavamo sa  $E \oplus F$ . Svaki vektor iz direktne sume onda možemo na jednoznačan način prikazati kao u obliku  $e + f$ , gdje je  $e \in E$  i  $f \in F$ . Ako je  $\{e_1, \dots, e_k\}$  baza u  $E$  i  $\{f_1, \dots, f_l\}$  baza u  $F$ , onda je unija tih dviju baza - baza prostora  $E \oplus F$ , i dimenzija mu je  $k + l$ .

Ako je  $B$  bilo koji podskup od  $X$ , onda možemo definirati vektorski potprostor svih linearnih kombinacija elemenata iz  $B$ . Ako je  $Y$  pravi potprostor od  $X$  takav da za bilo koji  $e \notin Y$  vrijedi  $L(Y \cup \{e\}) = X$ , onda kažemo da je  $Y$  potprostor u  $X$  **kodimenzijski jedan**, ili **hiperprostor**. Drugim riječima, potprostor  $Y$  je kodimenzijski jedan ako postoji jednodimenzijski potprostor  $E$  u  $X$  takav da je  $Y \oplus E = X$ . Npr. ako je  $\{x_1, \dots, x_k\}$  baza u  $X$ , onda je potprostor  $L(x_1, \dots, x_{k-1})$  kodimenzijski 1 u  $X$ .

Jedan od najvažnijih primjera konačno-dimenzijskih prostora je  $X = \mathbf{R}^n$  nad poljem  $F = \mathbf{R}$ . Lako se vidi da je  $\dim \mathbf{R}^n = n$ . Slično, vektorski prostor  $X = \mathbf{C}^n$  nad poljem  $F = \mathbf{C}$  je  $n$ -dimenzijski. Ako gledamo vektorski prostor  $X = \mathbf{C}^n$  nad poljem  $F = \mathbf{R}$ , onda je njegova dimenzija  $2n$ . U tom slučaju naime možemo  $\mathbf{C}^n$  poistovjetiti s  $\mathbf{R}^{2n}$ , jer je  $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  (Gaussova ravnina).

Ako na zadanom intervalu  $(a, b)$ ,  $a < b$ , gledamo funkcije  $1, x, \dots, x^k$ , onda skup njihovih linearnih kombinacija su polinomi stupnja najviše  $k$ . Skup svih polinoma stupnja najviše  $k$  je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Označavamo ga sa  $P_k$ . Očividno je  $\dim P_k = k + 1$ .

Skup svih polinoma s realnom varijablom  $x$  označavamo sa  $P$ . Očividno je  $P$  beskonačno-dimenzijski prostor, jer je  $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ .

Primjer beskonačno-dimenzijskog prostora je i skup  $X$  svih neprekinutih funkcija  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , gdje je interval  $(a, b)$  učvršćen. To je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. U beskonačnom slijedu neprekinutih funkcija  $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ , lako je vidjeti da je skup funkcija  $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$  linearno nezavisan za svaki  $k$  (naime, ako njihova linearna kombinacija, tj. polinom  $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$  stupnja  $\leq k$ , iščezava na intervalu  $(a, b)$ , onda taj polinom ima bezbroj nultočaka, a to svojstvo prema Gaussovu osnovnom teoremu algebre ima samo nul-polinom, tj. vrijedi  $a_i = 0$  za sve  $i$ ). Taj važan beskonačno-dimenzijski vektorski prostor označavamo sa  $C(a, b)$  i zovemo **prostorom neprekinutih funkcija** na intervalu  $(a, b)$ . Ovdje se dopušta da bude  $a$  ili  $b$  beskonačno, npr.  $C(0, \infty)$ . Primijetite da neprekinute funkcije definirane na otvorenom intervalu mogu imati singularitet na rubu intervala, npr.  $1/x \in C(0, 1)$ .

Drugi primjer vektorskog prostora, također beskonačno-dimenzijskog, je **prostor neprekinutih funkcija na zatvorenom intervalu**  $[a, b]$ . Označavamo ga sa

$C([a, b])$ . To je prostor uniformno neprekinutih funkcija, tj. za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  tako da za sve  $x_1, x_2 \in (a, b)$  iz uvjeta  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  slijedi  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ . Neprekinuta funkcija definirana na zatvorenom intervalu je uvijek omeđena, pa funkcije iz  $C([a, b])$  ne mogu imati singularitet, za razliku od funkcija iz  $C(a, b)$ . Lako se vidi da je  $C([a, b]) \subset C(a, b)$ , tj. svaku funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  možemo poistovjetiti s odgovarajućom funkcijom  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ .

Na sličan način može se definirati vektorski prostor  $C^1(a, b)$  svih funkcija  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  koje su svuda diferencijabilne i  $f'$  je neprekinuta. Analogno i skup  $C^2(a, b)$  svih funkcija  $y = f(x)$  za koje su  $f, f'$  i  $f''$  neprekinute (zapravo, dovoljno je zahtijevati samo neprekinutost od  $f''$ ).

Slično definiramo i prostor  $C^1([a, b])$  kao skup svih funkcija  $f \in C^1(a, b)$  takvih da se derivacija  $f' : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  može proširiti do neprekinute funkcije  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Poanta je u tome da su za  $f \in C^1([a, b])$  funkcije  $f$  i  $f'$  neprekinute na zatvorenom intervalu (dakle i omeđene), za razliku od funkcija iz  $C^1(a, b)$ . Slično definiramo  $C^2([a, b])$ , kao vektorski prostor funkcija čije prve i druge derivacije se mogu proširiti s intervala  $(a, b)$  do neprekinute funkcije (dakle i omeđene) na zatvoreni interval  $[a, b]$ .

Još jedan važan beskonačno-dimenzionalan prostor je prostor funkcija  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  koje su kvadratno-integrabilne, tj.  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ . Označavamo ga sa  $L^2(a, b)$  i zovemo **Lebesgueovim prostorom kvadratno integrabilnih funkcija** (kratko -  $L^2$ -prostor). Vidjet ćemo kasnije da je to doista vektorski prostor, tj. iz  $f, g \in L^2(a, b)$  slijedi da je i  $f + g \in L^2(a, b)$ . Npr.  $x^{-1/3} \in L^2(0, 1)$ .

Skup svih funkcija  $f \in L^2(a, b)$  za koje vrijedi  $\int_a^b f(x) dx = 0$  (lijeva strana pomnožena s  $1/(b-a)$  zove se srednja vrijednost od  $f$ ) je potprostor  $Y$  od  $L^2(a, b)$  čija kodimenzija je 1. Doista, označimo li sa  $E$  potprostor svih konstantnih funkcija (možemo ga poistovjetiti sa  $\mathbf{R}$ ), onda je  $L^2(a, b) = E \oplus Y$ . Svaku funkciju  $f \in L^2(a, b)$  možemo naime rastaviti na dva dijela:

$$f(x) = e(x) + g(x), \quad e(x) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad g(x) := f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x),$$

i pritom je  $e \in E$  i  $g \in Y$ .

Iz gornjih primjera dobivamo već cijelu jednu beskonačnu skalu vektorskih potprostora uloženi u  $L^2(a, b)$  (ovdje pretpostavljamo da je interval  $(a, b)$  omeđen):

$$\{0\} \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_k \dots \subset C^2([a, b]) \subset C^1([a, b]) \subset C([a, b]) \subset L^2(a, b).$$

Primijetite da prostor  $C(0, 1)$  nije sadržan u  $L^2(0, 1)$ , jer npr.  $1/x$  jest u  $C(0, 1)$ , ali nije u  $L^2(0, 1)$ .

Skup realnih brojeva  $\mathbf{R}$  nad poljem  $\mathbf{R}$  (nad samim sobom) je jednodimenzionalan. S druge strane, isti skup  $\mathbf{R}$  nad poljem racionalnih brojeva je beskonačno-dimenzionalan. Npr. ako je  $\pi = 3.14\dots$  Ludolphov broj, onda se pokazuje da je beskonačan skup  $1, \pi, \pi^2, \dots$  linearno nezavisan (tj. svaki njegov konačan podskup je linearno nezavisan). Razlog je taj što je broj  $\pi$  **transcendentan**, tj. ne može se dobiti kao nultočka nekog netrivialnog polinoma (tj.  $P(x) \neq 0$ ) s racionalnim koeficijentima.

Spomenimo i primjere vektorskih prostora koji imaju konačno mnogo elemenata.

Takav je npr.  $X = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$  nad poljem  $F = \mathbf{Z}_2$ , koji ima četiri elementa. Njegova dimenzija jednaka je 2. Zbroj bilo koja dva vektora je nul-vektor. On ima tri netrivialna potprostora. To su tri pravca kroz ishodište, a svaki pravac sastoji se od samo dva elementa. Općenitije, vektorski prostor  $X = \mathbf{Z}_p \times \dots \times \mathbf{Z}_p$  ( $k$  puta), gdje je  $p$  prost broj, je  $k$ -dimenzionalni vektorski prostor nad poljem  $\mathbf{Z}_p$ . On ima konačno mnogo elemenata, ukupno  $p^k$ .

### 1.3. Unitarni vektorski prostori

Vektorski prostor na kojem je definiran tzv. skalarni produkt omogućava da se geometrija prostora obogati pojmom okomitosti dvaju vektora, duljinom vektora i udaljenošću među vektorima.

Neka je  $X$  realan (ili kompleksan) vektorski prostor. **Skalarnim produktom** na  $X$  zovemo funkciju  $(\cdot|\cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  (ili  $\mathbf{C}$ ) za koju vrijedi:

- a)  $(x|x) \geq 0$  za sve  $x \in X$ ;  $(x|x) = 0$  onda i samo onda ako je  $x = 0$  (pozitivnost);
- b)  $(\lambda x|x) = \lambda(x|x)$  (homogenost);
- c)  $(x|y) = (y|x)$  u realnom vektorskom prostoru, a  $(x|y) = \overline{(y|x)}$  u kompleksnom (simetričnost).
- d)  $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$  (linearnost).

Vektorski prostor  $X$  snabdjeven skalarnim produktom zovemo **unitarnim prostorom**. Često se skalarni produkt označava i sa  $\langle x, y \rangle$ .

Za vektore  $x$  i  $y$  kažemo da su **okomiti** u unitarnom prostoru  $X$ , i pišemo  $x \perp y$ , ako je  $(x|y) = 0$ . Za vektor  $x$  kažemo da je okomit na podskup  $M$  od  $X$  ako je  $(x|m) = 0$  za sve  $m \in M$ . Skup svih vektora  $x$  koji su okomiti na podskup  $M$  čini vektorski potprostor koji se zove **ortogonalni komplement** skupa  $M$ , i označava sa  $M^\perp$ . Ako je  $M$  potprostor kodimenzijske 1 u unitarnom prostoru  $X$ , onda je potprostor  $M^\perp$  jednodimenzionalan.

Broj

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)} \geq 0$$

je zbog svojstva pozitivnosti dobro definiran za sve  $x \in X$ , i zove se **norma** vektora  $x$ . Jasno je da vrijedi  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ . S normom je na prirodan način definirana i **udaljenost**  $d(x, y)$  između  $x$  i  $y$ :

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

**Propozicija.** U unitarnom prostoru  $X$  vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog (nejednakost CSB):

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Također, vrijedi nejednakost trokuta:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

DOKAZ. Pretpostavimo da je  $X$  realan vektorski prostor (u kompleksnom slučaju je dokaz sličan). Funkcija  $f(t) = (x + ty|x + ty)$  je  $\geq 0$  i kvadratna u varijabli  $t \in \mathbf{R}$ :

$$f(t) = \|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Prema tome je diskriminanta nenegativna:  $D = b^2 - 4ac = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$ , odakle odmah slijedi nejednakost BSC. Oдавде odmah dobivamo i nejednakost trokuta, jer je  $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ . Q.E.D.

Za vektorski prostor  $X = \mathbf{R}^n$  elemente definiramo kao vektore stupce, a standardni skalarni produkt sa  $(x|y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ . Nejednakost CSB u ovom slučaju glasi:

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2},$$

gdje su  $x_i$  i  $y_i$  bilo koji realni brojevi.

Za vektore  $e_1, \dots, e_n$  u prostoru  $X = \mathbf{R}^n$  kažemo da čine **ortogonalnu bazu** ako su svi međusobno okomiti i  $\neq 0$ . Za svaki vektor  $x \in \mathbf{R}^n$  vrijedi

$$x = \frac{(x|e_1)}{\|e_1\|^2} e_1 + \dots + \frac{(x|e_n)}{\|e_n\|^2} e_n.$$

Ako su vektori  $e_1, \dots, e_n$  ortogonalni i jedinični (kraće, ortonormirani), onda kažemo da čine **ortonormiranu bazu** u  $\mathbf{R}^n$ . Vidimo da je

$$x = (x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_n)e_n.$$

Isto vrijedi i u prostoru  $X = \mathbf{C}^n$ . Pojam ortonormirane baze u beskonačno-dimenzionalnom slučaju je suptilniji, i vodi do pojma Fourierovog reda. Rabi se ponajviše u Lebesgueovom prostoru kvadratno integrabilnih funkcija.

U vektorskom prostoru kvadratno integrabilnih funkcija  $L^2(a, b)$  definiramo skalarni umnožak funkcija  $f, g \in L^2(a, b)$  sa

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Nejednakost CSB u ovom slučaju glasi:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}.$$

Ako su  $f$  i  $g$  kvadratno integrabilne, onda je zbog nejednakosti trokuta i  $f + g$  kvadratno integrabilna ( $\|f + g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$ ), pa je  $L^2(a, b)$  doista vektorski prostor.

## 1.4. Normirani vektorski prostori

Prirodno je uvesti i pojam **normiranog prostora**. To je jednostavno realni (ili kompleksni) vektorski prostor  $X$  na kojem je definirana norma, tj. funkcija  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$  takva da za sve  $x, y \in X$  i  $\lambda \in \mathbf{R}$  (ili  $\lambda \in \mathbf{C}$ ) vrijedi:

- $\|x\| \geq 0$  za sve  $x \in X$ ;  $\|x\| = 0$  onda i samo onda ako je  $x = 0$  (pozitivnost);
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (homogenost);
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (nejednakost trokuta).



Svaki unitarni prostor je normiran prostor, tj. svaki prostor iz prošlog odjeljka je normiran prostor. Niže ćemo vidjeti neke normirane prostore za koje ne postoji skalarni produkt koji bi ih generirao. U normiranom prostoru može se uvesti pojam udaljenosti, kugle i otvorenog skupa, što omogućava uvođenje važnog pojam konvergencije slijeda.

U normiranom prostoru  $X$  skup svih  $x$  takvih da je  $\|x\| < r$  zovemo **otvorenom kuglom** polumjera  $r > 0$ , i označavamo sa  $B_r(0)$ , Općenitije, kugla  $B_r(a)$ , gdje je  $r > 0$  i  $a$  zadani element u  $X$ , definira se kao skup svih  $x$  za koje vrijedi  $\|x - a\| < r$ . Na sličan način uvodimo i **zatvorenu kuglu**  $\overline{B}_r(a)$ , kao skup svih  $x$  za koje je  $\|x - a\| \leq r$ .

Skup svih  $x$  takvih da je  $\|x - a\| = r$  zove se **sfera** oko  $a$  polumjera  $r$ , i označava sa  $S_r(a)$ . Jasno je da je  $\overline{B}_r(a) = B_r(a) \cup S_r(a)$ .

Za neki podskup  $A$  normiranog prostora  $(X, \|\cdot\|)$  kažemo da je **otvoren skup** ako se može dobiti kao unija koliko god otvorenih kugala. Primijetite da pojam otvorenog skupa ovisi i o odabranoj normi.

Za dvije norme  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  na istom vektorskom prostoru  $X$  kažemo da su međusobno **ekvivalentne** ako postoje konstante  $C_1, C_2 > 0$  tako da za sve  $x \in X$  vrijedi  $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ . Nije teško vidjeti da ekvivalentne norme definiraju iste otvorene skupove na  $X$ .

Npr. nutrina kvadrata (tj. puni kvadrat bez ruba) je otvoren skup u  $\mathbf{R}^2$  s obzirom na metriku  $\|\cdot\|_2$ . Može pokazati da su svake dvije norme na vektorskom prostoru  $\mathbf{R}^n$  međusobno ekvivalentne (pa i na svakom konačno-dimenzijskom). Opišimo neke od najvažnijih norma na  $\mathbf{R}^n$ .

Pogledajmo neke primjere. Unitarni vektorski prostor  $\mathbf{R}^n$  (sa skalarnim produktom  $(x|y) = x^\top \cdot y$ ) ima pripadnu normu  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  koja se zove **euklidska norma** na  $\mathbf{R}^n$ . Drugi vektorski prostor  $\mathbf{R}^n$  s normom  $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  postaje također normiran prostor. On nije unitaran, tj. ne postoji nikakav skalarni produkt na  $\mathbf{R}^n$  čija bi pripadna norma bila  $\|x\|_\infty$ . Vektorski prostor  $\mathbf{R}^n$  s normom  $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$  također. Sva ova tri (različita!) normirana prostora su specijalni slučaj cijele jedne skale normiranih prostora  $\mathbf{R}^n$  s tzv.  $p$ -normom definiranom sa

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p},$$

gdje je  $p$  zadani broj,  $1 \leq p < \infty$ . Normirane prostore  $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_p)$  i  $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_q)$  smatramo različitim prostorima za  $p \neq q$ , iako su kao skupovi isti. Ponovimo, normirani prostor nije samo skup  $X$ , nego i pripadajuća norma. Inače, nije teško vidjeti da za svaki  $x \in \mathbf{R}^n$  vrijedi  $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$ .

Oblik jedinične kružnice  $S_1(0)$  u  $\mathbf{R}^2$  jako ovisi o odabranoj normi. Npr. s normom  $\|\cdot\|_2$  jedinična kružnica  $S_1(0)$  je okrugla, dok s normom  $\|\cdot\|_1$  ili  $\|\cdot\|_\infty$  jedinična kružnica  $S_1(0)$  ima oblik kvadrata.

Normirani vektorski prostor  $L^p(a, b)$  (**Lebesgueov  $L^p$ -prostor**), gdje je  $p$  zadan broj,  $1 \leq p < \infty$ , sadrži sve funkcije  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  koje su  $p$ -integrabilne, tj. broj  $\int_a^b |f(x)|^p dx$  je konačan. Definiramo

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ako je interval  $(a, b)$  omeđen i  $p < q$ , onda je  $L^q(a, b) \subset L^p(a, b)$ . Nije teško vidjeti da pritom postoje funkcije  $f \in L^q$  koje nisu u  $L^p$ , tj. prostori se razlikuju kao skupovi. Za  $p = 2$  dobivamo poznati prostor kvadratno integrabilnih funkcija  $L^2(a, b)$ , koji je unitaran. Prostori  $L^p(a, b)$  za  $p \neq 2$  nisu unitarni, tj. u tom slučaju ne postoji nikakav skalarni produkt na  $L^p$  koji bi generirao pripadnu normu.

Spomenimo bez dokaza zanimljivu i važnu generalizaciju nejednakosti CSB, za slučaj prostora  $X = \mathbf{R}^n$  i slučaj  $L_p$ -prostora.

**Teorem. (Hölderova nejednakost)** Neka je  $1 < p < \infty$  i definirajmo konjugirani eksponent od  $p$  kao broj  $q = p/(p - 1)$ , tj.  $1/p + 1/q = 1$ .

a) Za sve  $x_i, y_i \in \mathbf{R}$  vrijedi:

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} (|y_1|^q + \dots + |y_n|^q)^{1/q}.$$

ili kraće,  $|(x|y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ .

b) Neka su zadane funkcije  $f \in L^p(a, b)$  i  $g \in L^q(a, b)$ . Onda je  $f \cdot g \in L^1(a, b)$ , i vrijedi

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

ili kraće,  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

Pokazuje se da iz Hölderove nejednakosti slijedi odgovarajuća nejednakost trokuta  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ , za sve  $x \in \mathbf{R}^n$ , i  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ , za sve  $f, g \in L^p(a, b)$ , koja se u oba slučaja zove **nejednakost Minkowskog**.

Sve gore spomenute primjere prostora funkcija s jednom varijablom možemo definirati i za funkcije više varijabla. Npr.  $L^2(\Omega)$ , gdje je  $\Omega$  zadani otvoren skup u  $\mathbf{R}^n$ , je skup svih **kvadratno integrabilnih funkcija**  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , tj. onih za koje je broj  $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$  konačan. Skalarni produkt na prostoru  $L^2(\Omega)$ , definiramo sa  $(f|g) := \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$ . Pripadna norma je  $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = (\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ . Moguće je definirati i normirani vektorski prostor  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , kao skup svih funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  takvih da je  $\int_{\Omega} |f(x)|^p < \infty$ , s normom  $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f(x)|^p)^{1/p}$ . I za te prostore vrijedi analogna Hölderova nejednakost kao za prostore  $L^p(a, b)$ .

Za odabrana dva elementa  $x$  i  $y$  u normiranom prostoru  $X$  definirana je **udaljenost**  $\|x - y\|$  između  $x$  i  $y$ . To onda omogućava da definiramo i konvergenciju u  $X$ : za slijed  $x_k$  vektora iz  $X$  kažemo da **konvergira** k  $x$ , i pišemo  $\lim x_k = x$ , ako  $\|x_k - x\| \rightarrow 0$  kad  $k \rightarrow \infty$ .

Isto tako, za slijed  $x_k$  kažemo da je **Cauchyjev** ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $n = n(\varepsilon)$  takav da za sve  $k, l \geq n$  vrijedi  $\|x_k - x_l\| \leq \varepsilon$ . Ovo svojstvo pišemo kraće u obliku  $\|x_k - x_l\| \rightarrow 0$  kad  $k, l \rightarrow \infty$ . Lako se provjeri da je npr. svaki konvergentan slijed u normiranom prostoru Cauchyjev.

Ako svaki Cauchyjev slijed u  $X$  konvergira, onda kažemo da je vektorski prostor  $X$  **potpun**. Slikovito rečeno, potpun normiran prostor je prostor "bez šupljina", tj. gust u sebi.

Potpun normiran prostor zove se još i **Banachov prostor**. Potpun unitaran prostor (znamo da je on i normiran) zove se **Hilbertov prostor**.

Svaki konačno-dimenzionalan je Banachov, neovisno o izboru norme.

U normiranom prostoru možemo uvesti i pojam **reda**  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  određenog slijedom  $(x_k)$  u  $X$ . Za red  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  kažemo da konvergira ako konvergira slijed njegovih parcijalnih suma  $s_k = x_1 + \dots + x_k$  k nekom  $s \in X$ , tj.  $\|s - s_k\| \rightarrow 0$  kad  $k \rightarrow \infty$ . U tom slučaju pišemo da je  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ .

Važni beskonačno-dimenzionalni Banachovi prostori su  $L^p(a, b)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Među njima je samo  $L^2(a, b)$  unitaran prostor, dakle i Hilbertov prostor. Vektorski potprostor  $C([a, b])$  kao potprostor normiranog prostora  $L^p(a, b)$  (tj. s pripadnom normom  $\|\cdot\|_p$ ) nije potpun. Ipak, on je gust u  $L^p(a, b)$ , tj. za svaki  $f \in L^p(a, b)$  i bilo koji  $\varepsilon > 0$  postoji uniformno neprekinuta funkcija  $f_0 \in C([a, b])$  takva da je  $\|f - f_0\| \leq \varepsilon$ . Npr. za funkciju  $x^{-1/3} \in L^2(0, 1)$  postoji slijed uniformno neprekinutih funkcija (funkcija iz  $C([a, b])$ ) koje k njoj konvergiraju u  $L^2$ -normi. Kako  $x^{-1/3} \notin C([0, 1])$ , to pokazuje da prostor  $C([0, 1])$  nije gust u sebi s  $L^2$ -normom, tj. nije potpun (i dakle nije Hilbertov prostor).

S druge strane, može se pokazati da prostor  $C([a, b])$  s  $\infty$ -normom, tj.  $\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  jest potpun, tj. Banachov je prostor.

## 1.5. Matrice

**Matrica**  $A = (a_{ij})$  tipa  $m \times n$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ , je pravokutna tablica od  $m \cdot n$  brojeva iz polja  $F$ , složenih u  $m$  redaka i  $n$  stupaca. Element  $a_{ij}$  nalazi se u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu matrice  $A$ . Dvije matrice  $A$  i  $B$  istoga tipa zbrajamo tako da zbrojim odgovarajuće elemente jedne i druge, tj.  $A + B$  će na mjestu  $(i, j)$  imati element  $a_{ij} + b_{ij}$ . Za zadani skalara  $\lambda \in F$  i matricu  $A$  definiramo matricu  $\lambda A$  istog tipa kao  $A$ , koja na svakom mjestu  $(i, j)$  ima element  $\lambda a_{ij}$ . Skup svih matrica tipa  $m \times n$  čini vektorski prostor  $M_{m \times n}$  dimenzije  $mn$ .

Maksimalan mogući broj linearno nezavisnih redaka matrice  $A$  zove se redčani rang matrice. Pokazuje se da je on jednak slično definiranom stupčanom rang, pa onda govorimo sasvim kratko o **rangu matrice**  $A$ .

Za dvije matrice  $A$  i  $B$  kažemo da su **ulančane**, ako je broj stupaca prve jednak broju redaka druge. Drugim riječima, ako je  $A$  tipa  $m \times n$ , onda je  $B$  tipa  $n \times p$ . Za ulančane matrice definiramo umnožak  $AB$  kao matricu  $C$  tipa  $m \times p$ , čiji elementi su određeni sa

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

**Transponirana matrica**  $A^{\top}$  matrice  $A$  tipa  $m \times n$  je matrica tipa  $n \times m$  u kojoj retke od  $A$  ispisujemo kao stupce (ili što je isto, stupce od  $A$  ispisujemo kao retke u  $A^{\top}$ ). Vrijedi  $(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top}$ .

Ako je matrica  $A$  tipa  $n \times n$ , onda kažemo da je **kvadratna**, reda  $n$ . Za matricu  $A$  onda možemo definirati njene potencije kao  $A^2 := AA$ ,  $A^3 := A^2 A$  itd., tj. induktivno  $A^{k+1} := A^k A$ .

Kvadratnu matricu  $I = (\delta_{ij})$  reda  $n$ , gdje je  $\delta_{ii} = 1$ , a inače nula, zovemo **jediničnom matricom**. Broj  $\delta_{ij}$  zove se **Kroneckerov simbol**. Za svaku kvadratnu matricu reda  $n$  vrijedi  $AI = IA = A$ .

Svakoj kvadratnoj matrici  $A$  pridružujemo skalar  $|A|$  (ili  $\det A$ ) iz polja  $F$  koji se zove **determinanta** od  $A$ . Ako je  $A$  reda 1, definiramo  $|A| = a_{11}$ . Ako je  $A$  reda  $n$ , onda  $|A|$  definiramo kao zbroj svih umnožaka oblika  $(-1)^{\sigma(j)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$  gdje je  $j = j_1, \dots, j_n$  bilo koja permutacija poredanog  $n$ -terca  $1, 2, \dots, n$  (ima ih ukupno  $n!$ ), a  $\sigma(j)$  je broj **inverzija** u permutaciji  $j$ . **Inverzija** (tj. obrat) u permutaciji  $j_1, \dots, j_n$  je bilo koji dvojac  $(j_k, j_l)$  kod kojeg je  $k < l$  ali  $j_k > j_l$ . Npr. permutacija  $3, 1, 2$  ima točno dvije inverzije:  $(3, 1)$  i  $(3, 2)$ , pa je  $\sigma(3, 1, 2) = 2$ . Također  $\sigma(3, 2, 1) = 3$ , dok je  $\sigma(1, 2, 3) = 0$ . Među svim permutacijama brojeva  $1, 2, \dots, n$  najveći broj inverzija imamo u permutaciji  $n, \dots, 2, 1$ . Ima ih ukupno  $\binom{n}{2}$ , koliko ima dvočlanih podskupova u toj permutaciji.

Determinanta od  $A$  može se izračunati **Laplaceovim razvojem** po bilo kojem ( $i$ -tom) retku:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

ili bilo kojem ( $j$ -tom) stupcu od  $A$ :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Pritom je  $A_{ij}$  **algebarski komplement** od  $A$ , koji se definira kao  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , a  $M_{ij}$  se dobiva računanjem determinante reda  $n-1$  koja iz  $A$  nastaje brisanjem njegova  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca. Broj  $M_{ij}$  zove se **minora** od  $A$ .

*Zamjenom redaka determinanta samo mijenja predznak. Determinanta se ne mijenja transponiranjem matrice. Ako nekom retku matrice dodamo neki drugi redak pomnožen s konstantom, determinanta se ne mijenja. Ako u matrici imamo dva proporcionalna retka, determinanta je jednaka nuli. Ako svi elementi nekog retka matrice imaju zajednički faktor, onda ga možemo izlučiti ispred determinante. Ista svojstva vrijede i za stupce.*

Ako su  $A$  i  $B$  dvije kvadratne matrice istog reda, onda vrijedi važan **Binet – Cauchyjev teorem**:

$$\det AB = \det A \cdot \det B, \quad \text{tj.} \quad |AB| = |A| \cdot |B|.$$

Za kvadratnu matricu  $A$  kažemo da je **invertibilna** ili **regularna** ako postoji matrica  $A^{-1}$  takva da je  $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$ . Matrica  $A^{-1}$  (ako postoji) određena je jednoznačno s  $A$  i zove se **inverzna matrica** od  $A$ . Umnožak  $AB$  regularnih matrica  $A$  i  $B$  je opet regularna matrica, i vrijedi  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Ako matrica nije regularna, onda kažemo da je **singularna**.

Pokazuje se da za svaku kvadratnu matricu  $A$  vrijedi da je

$$A \cdot \tilde{A}^T = \det A \cdot I,$$

gdje je  $\tilde{A} = (A_{ij})$ . Ako je  $A$  regularna, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T,$$

i vrijedi  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ .

Sljedeća svojstva kvadratne matrice  $A$  reda  $n$  su međusobno ekvivalentna:

- a) matrica  $A$  je invertibilna,
- b)  $\det A \neq 0$ ,
- c)  $r(A) = n$ ,
- d) iz  $Ax = 0$  (gdje je  $x \in \mathbf{R}^n$ ) slijedi  $x = 0$ ,
- e) svi redci od  $A$  su linearno nezavisni,
- f) svi stupci od  $A$  su linearno nezavisni.

To je isto što i reći da su sljedeća svojstva međusobno ekvivalentna:

- a) matrica  $A$  nema inverz,
- b)  $\det A = 0$ ,
- c)  $r(A) < n$ ,
- d) postoji  $x \neq 0$  tako da je  $Ax = 0$  (tj. jednačba  $Ax = 0$  ima netrivialno rješenje),
- e) redci od  $A$  su linearno zavisni,
- f) stupci od  $A$  su linearno zavisni.

Posebno, jednačba  $Ax = 0$  posjeduje netrivialno rješenje  $x \neq 0$  onda i samo onda ako je  $\det A = 0$ .

Za kvadratne matrice možemo definirati i pojam polinoma čija varijabla će biti matrica. Doista, neka je zadan polinom  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ , gdje je  $x$  formalna varijabla, a  $a_i$  iz polja  $F$ . Ako je  $A$  kvadratna matrica s elementima iz polja  $F$ , onda definiramo **polinom od matrice** kao matricu  $P(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_kA^k$ .

Za kvadratnu matricu  $A$  kažemo da je **gornja trokutasta** ako je  $a_{ij} = 0$  za  $i > j$ . Matrica  $A$  je dijagonalna ako je  $a_{ij} = 0$  za sve  $i \neq j$ . Umnožak dviju gornjih trokutastih matrica  $A$  i  $B$  je opet gornja trokutasta matrica s elementima  $a_{ii}b_{ii}$  na dijagonali. Za gornju trokutastu matricu vrijedi  $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$ . Polinom  $P(A)$  od gornje trokutaste (dijagonalne) matrice  $A = (a_{ij})$  je opet gornja trokutasta (dijagonalna) matrica koja na dijagonali ima skalare  $P(a_{11}), \dots, P(a_{nn})$ .

Neka je  $X$  vektorski prostor  $x$  odabrani element u  $X$ . Neka  $x$  ima u bazi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  koordinate  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Neka taj isti vektor u nekoj drugoj bazi  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  ima koordinate  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ . Onda je  $\mathbf{x} = T\mathbf{x}'$ , gdje je  $T = (t_{ij})$  **matrica prijelaza** iz prve baze u drugu. Ona se dobiva preko rastava  $f_j = \sum_{i=1}^n t_{ij}e_i$ , tj. stupci od  $T$  dobivaju se kao komponente vektora druge baze  $f_1, \dots, f_n$  u rastavu po prvoj bazi. Matricu prijelaza možemo stoga uvjetno pisati i pamtit i kao  $T = [f_1, \dots, f_n]$ .

Pretpostavimo da je  $A$  matrica tipa  $m \times n$ . Neka je  $I$  jedinična matrica reda  $m$ , a  $I_{ij}$  matrica koja iz  $I$  nastaje zamjenom  $i$ -tog i  $j$ -tog retka. Onda je  $I_{ij}A$  jednaka matrici koja iz  $A$  nastaje zamjenom  $i$ -tog i  $j$ -tog retka. Ako je  $I$  matrica reda  $n$  i  $I_{ij}$  matrica koja iz  $I$  nastaje zamjenom  $i$ -tog i  $j$ -tog stupca, onda je  $AI_{ij}$  jednaka matrici koja iz  $A$  nastaje zamjenom  $i$ -tog i  $j$ -tog stupca. Primijetite da u jediničnoj matrici  $I$  zamjena  $i$ -tog i  $j$ -tog stupca daje isti rezultat kao i zamjena  $i$ -tog i  $j$ -tog stupca.

Vrijedi  $I_{ij}^2 = I$ , što je očividno (lijeva strana odgovara dvostrukoj zamjeni  $i$ -tog i  $j$ -tog retka u jediničnoj matrici  $I$ ).

## 1.6. Linearni operatori

Neka su  $X$  i  $Y$  dva vektorska prostora nad istim poljem  $F$ . **Linearnim operatorom** iz  $X$  u  $Y$  zovemo preslikavanje  $A : X \rightarrow Y$  koje ispunjava **uvjet linearnosti**:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$$

za sve  $\lambda_i \in F$  i  $x_i \in X$ . To je isto što i zahtijevati da  $A$  ispunjava sljedeća dva uvjeta:

- a)  $A(x + y) = A(x) + A(y)$  (aditivnost),
- b)  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$  (homogenost).

Vrlo često se vrijednost  $A(x)$  označava samo sa  $Ax$ . Svakom linearnom operatoru  $A : X \rightarrow Y$  pridružujemo dva važna vektorska potprostora.

- a) **Nul-potprostor** od  $A$  je skup svih  $x \in X$  za koje je  $Ax = 0$ . To je potprostor od  $X$ . Označava se sa  $N(A)$  ili  $\ker A$  (kernel = jezgra). Dimenzija tog potprostora zove se **defekt** linearnog operatora  $A$  i označava se sa  $d$  ili  $d(A)$ ;
- b) **Slika** od  $A$  je skup svih mogućih vrijednosti  $Ax \in Y$ , gdje je  $x$  bilo koji element iz  $X$ . To je potprostor od  $Y$  koji označavamo sa  $R(A)$ ; njegova dimenzija zove se **rang linearnog operatora**, i označava se sa  $r$  ili  $r(A)$ .

Što je nul-potprostor od  $A$  veći, slika od  $A$  je manja. Točnije, za svaki linearni operator  $A : X \rightarrow Y$  je  $d + r = \dim X$ .

Linearni operator  $A : X \rightarrow Y$  jednoznačno je određen svojim vrijednostima samo na bazi  $e_1, \dots, e_n$  u  $X$ . Doista, za bilo koji  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in X$  je zbog linearnosti od  $A$  onda  $A(x) = x_1 A(e_1) + \dots + x_n A(e_n)$ .

Neka je  $A : X \rightarrow Y$  linearni operator i pretpostavimo da su  $X$  i  $Y$  konačno-dimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem  $\mathbf{R}$  (diskusija vrijedi i za bilo koje drugo polje). Odaberimo bazu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  u  $X$  i bazu  $\{f_1, \dots, f_m\}$  u  $Y$ . Ona rastav  $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ , definira matricu  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  tipa  $m \times n$  (koeficijente vektora  $A(e_j)$  slažemo u  $j$ -ti stupac matrice, pa možemo uvjetno pisati  $\mathbf{A} = [Ae_1, \dots, Ae_n]$  radi lakšeg pamćenja). Matrica  $\mathbf{A}$  zove se **matrica operatora**  $A$  u paru baza  $(e_i)$  i  $(f_i)$  (ako operator  $A$  djeluje među istim prostorima, tj. imamo  $A : X \rightarrow X$ , onda uzimamo istu bazu u polaznom i dolaznom prostoru).

Neka  $x$  bilo koji vektor u  $X$  i  $\mathbf{x}$  pripadni vektor stupac u  $\mathbf{R}^n$  dobiven nakon rastava vektora  $x$  u bazi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  u  $X$ . Neka je  $y = Ax$  i  $\mathbf{y}$  pripadni vektor stupac u  $\mathbf{R}^m$  dobivne rastavom od  $y$  u bazi  $\{f_1, \dots, f_m\}$  u  $Y$ . Onda vrijedi  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Na taj način, nakon što odaberemo par baza u  $X$  i  $Y$ , linearni operator  $A : X \rightarrow Y$  možemo poistovjetiti s matricom  $\mathbf{A}$ .

Obratno, neka je zadana bilo koja matrica  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  tipa  $m \times n$ , s realnim (ili kompleksnim) koeficijentima. Vektorski prostor  $\mathbf{R}^n$  (ili  $\mathbf{C}^n$ ) gledamo kao skup vektora stupaca s  $n$  realnih (kompleksnih) komponenata, i slično  $\mathbf{R}^m$  ( $\mathbf{C}^m$ ). Definiramo linearni operator  $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  generiran matricom  $\mathbf{A}$  na ovaj način:  $A(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , gdje

je  $\cdot$  matricno množenje (ovdje je to množenje matrice tipa  $m \times n$  i vektora stupca tipa  $n \times 1$ ). Rezultat  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je vektor stupac tipa  $m \times 1$ , tj. doista u  $\mathbf{R}^m$ . Matrica operatora  $A$  u paru kanonskih baza u  $\mathbf{R}^m$  i  $\mathbf{R}^n$  je upravo početna matrica  $\mathbf{A}$ . Na taj način možemo govoriti o **nul-potprostoru matrice** kao o skupu  $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^m\}$ , i o **slici matrice**  $R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$ .

Vrijednost  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  jednaka je linearnoj kombinaciji  $x_1 a^1 + \dots + x_n a^n \in \mathbf{R}^m$ , gdje su  $a^1, \dots, a^n$  stupci matrice  $\mathbf{A}$ .

Rang linearnog operatora  $A : X \rightarrow Y$  jednak je rangu pripadne matrice  $\mathbf{A}$  operatora  $A$  u bilo kojem paru baza u  $X$  i  $Y$ . Linearni operator  $A$  je surjektivan onda i samo onda ako je  $r = m$  (onda je nužno i  $m \leq n$ , jer  $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$ ). Linearni operator  $A$  je injektivan onda i samo onda ako je bez defekta, tj.  $d = 0$ .

**Teorem.** Kompozicija linearnih operatora  $A : X \rightarrow Y$  i  $B : Y \rightarrow Z$  je opet linearni operator. Neka je u svakom od vektorskih prostora  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  zadana po jedna baza. Neka je  $\mathbf{C}$  matrica operatora  $B \circ A : X \rightarrow Z$  u odgovarajućem paru baza, te  $\mathbf{A}$  matrica operatora  $A$  i  $\mathbf{B}$  matrice operatora  $B$ . Onda je  $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ .

Za linearni operator  $A : X \rightarrow Y$  kažemo da je **izomorfizam vektorskih prostora**  $X$  i  $Y$  ako je bijekcija (tj. injekcija i surjekcija). Ako za vektorske prostore  $X$  i  $Y$  postoji izomorfizam među njima, kažemo da su **izomorfni**. Izomorfne vektorske prostore  $X$  i  $Y$  poistovjećujemo.

Svaki vektorski prostor  $X$  nad poljem  $F$  dimenzije  $n$  je izomorfan s  $F^n$ . Doista, ako uzmemo bilo koju bazu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  u  $X$ , onda je funkcija  $A : X \rightarrow F^n$ ,  $A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = (x_1, \dots, x_n)^T$ , izomorfizam.

Označimo s  $P_n$  **vektorski prostor svih polinoma** u realnoj varijabli  $x$ , stupnja  $\leq n$ . Definirajmo linearni operator  $A : P_n \rightarrow P_n$  kao operator deriviranja, tj.  $Af = f'$  za svaki polinom  $f \in P_n$ . Kako je  $f$  polinom stupnja najviše  $n$  u varijabli  $x$ , onda  $n + 1$ -va derivacija poništava  $x^n$ , dakle i svaki polinom  $f \in P_n$ . Drugim riječima,  $A^{n+1}$  je nul-operator. Kako je  $(x^k)' = kx^{k-1}$ , matrica operatora deriviranja u (kanonskoj) bazi  $1, x, \dots, x^n$  prostora  $P_n$  je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & n & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica je reda  $n + 1$ , na glavnoj dijagonali su nule, na sporednoj  $1, 2, \dots, n$ , a svi ostali elementi su nula. Zbog  $A^{n+1} = 0$  iz prethodnog teorema zaključujemo da je i  $\mathbf{A}^{n+1} = 0$ , tj.  $n + 1$ -va potencija matrice  $\mathbf{A}$  jednaka je nul-matrici. Kvadratne matrice čija neka potencija je jednaka nul-matrici zovu se **nilpotentne matrice**. Vektorski prostor  $P_n$  izomorfan je s  $\mathbf{R}^{n+1}$ , jer izomorfizam ostvaruje funkcija koja polinomu  $f \in P_n$ ,  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , pridružuje poredani  $(n + 1)$ -terac koeficijenata  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ .

Ako su zadani normirani vektorski prostori  $X$  i  $Y$  onda se, kao što smo vidjeli, na njima može uvesti pojam konvergencije. To omogućava da definiramo i pojam neprekinute funkcije među normiranim prostorima. Za neku funkciju  $F : X \rightarrow Y$  kažemo da je neprekinuta u točki  $x \in X$  ako iz  $x_k \rightarrow x$  slijedi  $F(x_k) \rightarrow F(x)$ , ili kraće:

$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x)$ . Ako je  $F = A : X \rightarrow Y$  linearni operator, onda je zbog linearnosti neprekinutost linearnog operatora dovoljno provjeriti samo za  $x = 0$ . Svaki linearni operator definiran među konačno-dimenzijskim vektorskim prostorima  $X$  i  $Y$  je neprekinut.

Za zadane konačno-dimenzijske vektorske prostore  $X$  i  $Y$  skup svih linearnih operatora  $A : X \rightarrow Y$  označavamo sa  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Taj skup je vektorski prostor, ako zbrajanje operatora  $A$  i  $B : X \rightarrow Y$  definiramo sa  $(A + B)(x) = Ax + Bx$ , a množenje sa skalarom  $\lambda A$  sa  $(\lambda A)(x) = \lambda \cdot Ax$ . Ako su  $X$  i  $Y$  konačno-dimenzijski prostori, lako se vidi da je  $\dim \mathcal{L}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y$ . Npr.  $\dim \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) = mn$ , jer  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$  možemo poistovjetiti s vektorskim prostorom matrica tipa  $m \times n$ , tj. sa  $M_{mn}$ . Vektorski prostor  $\mathcal{L}(X, X)$  svih linearnih operatora iz  $X$  u samog sebe označavamo kraće sa  $\mathcal{L}(X)$ .

Ako su  $X$  i  $Y$  normirani vektorski prostori, onda se i u vektorski prostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  svih neprekinutih linearnih operatora iz  $X$  u  $Y$  može na prirodan način uvesti tzv. **operatorska norma**  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$ . Pritom je neprekinutost operatora  $A$  ekvivalentna s uvjetom  $\|A\| < \infty$ , pa kažemo još da je  $A$  **omeđen linearan operator** (engl. bounded).

Normu od  $A$  možemo opisati na ekvivalentan način s ova dva zahtjeva:

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
2.  $\|A\|$  ima svojstvo minimalnosti:  $\|A\|$  je najmanji broj  $M \geq 0$  za koji vrijedi  $\|Ax\| \leq M\|x\|$  za sve  $x$ .

S tom normom vektorski prostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  postaje normiran prostor. Doista,

- a)  $\|A\| \geq 0$  je jasno; ako je  $\|A\| = 0$  onda je  $\|Ax\| = 0$  za sve  $x$ , dakle  $A = 0$  (pozitivnost);
- b)  $\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \|\lambda Ax\|/\|x\| = \sup_{x \neq 0} |\lambda| \cdot \|Ax\|/\|x\| = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\| = |\lambda| \cdot \|A\|$  (homogenost);
- c)  $\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ , dakle zbog svojstva minimalnosti je onda  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (nejednakost trokuta).

Za operatorsku normu vrijedi i još jedno vrlo važno svojstvo:

- d) ako su  $A, B \in \mathcal{L}(X)$ , onda je  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ . Posebno, vrijedi  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  za svaki prirodan broj  $k$ .

Dokaz je lagan. Vrijedi  $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$ , dakle zbog svojstva minimalnosti broja  $\|AB\|$  je onda  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

O toj važnoj normi bit će više riječi u odjeljku o matričnim normama.

Neka je  $X$  konačno-dimenzijski vektorski prostor nad poljem  $K = \mathbf{R}$  ili  $\mathbf{C}$ . Neprekinuti linearni operatori iz  $X$  u  $K$  zovu se **linearni funkcionali**. Vektorski prostor  $\mathcal{L}(X, K)$  svih neprekinutih linearnih funkcionala iz  $X$  u  $K$  zove se **dualni prostor** od  $X$ , i označava sa  $X'$ . Npr. funkcional  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  zadan sa  $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ , je linearan funkcional, tj. sadržan u  $(\mathbf{R}^n)'$ . To su zapravo i jedini funkcionali na  $\mathbf{R}^n$ , tj. svi su oblika  $f_a : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , gdje je  $f_a(x) = (x|a)$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$  (**Rieszov teorem o reprezentaciji linearnog funkcionala**). Vrlo lako je vidjeti da je pridruživanje  $f \mapsto a$  linearni operator iz  $(\mathbf{R}^n)'$  u  $\mathbf{R}^n$ , i to bijektivan, pa se dualni prostor  $(\mathbf{R}^n)'$  može poistovjetiti s  $\mathbf{R}^n$ .



## 1.7. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori kvadratne matrice

Neka je zadana kvadratna matricu  $A$  s kompleksnim koeficijentima. Za kompleksni broj  $\lambda$  kažemo da je **svojstvena vrijednost** matrice ako postoji vektor  $x \neq 0$  takav da je  $Ax = \lambda x$ . Taj vektor zove se **svojstveni vektor** matrice  $A$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti od  $A$  zovemo **spektrom matrice**  $A$  i označavamo sa  $\sigma(A)$ . Za  $\lambda \in \sigma(A)$  jednačba  $(\lambda I - A)x = 0$  ima netrivialno rješenje  $x \neq 0$ , pa vrijedi je  $\det(\lambda I - A) = 0$ , i obratno. Polinom  $k(\lambda) = \det(\lambda I - A)$   $n$ -tog stupnja u kompleksnoj varijabli  $\lambda$  zove se **karakteristični polinom matrice**  $A$ . Kao što smo vidjeli,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : k(\lambda) = 0\}.$$

Prema tome spektar matrice  $A$  može imati najviše  $n$  elemenata. Slične matrice imaju isti karakteristični polinom, dakle isti spektar. Maksimum svih apsolutnih vrijednosti svojstvenih vrijednosti kvadratne matrice  $A$  zovemo **spektralnim radiusom** od  $A$  i označavamo sa  $r(A)$ , tj.  $r(A) = \max\{|\lambda| : k(\lambda) = 0\}$ .

Nul-potprostor matrice  $\lambda I - A$ , gdje je  $\lambda \in \sigma(A)$ , zovemo **svojstvenim potprostorom** matrice  $A$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ , i označavamo ga s  $E(\lambda)$ . Dimenzija mu je barem jedan, i svaki ne-nul element iz  $E(\lambda)$  je svojstveni vektor od  $A$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Različitim svojstvenim vrijednostima matrice  $A$  odgovaraju linearno nezavisni svojstveni vektori. Dimenzija svojstvenog prostora  $E(\lambda)$  zove se **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti  $\lambda$ .

Svojstvena vrijednost  $\lambda$  matrice  $A$  je nultočka karakterističnog polinoma  $k(\lambda)$ . Njena kratnost (kao nultočke polinoma) zove se **algebarska kratnost**. Za zadanu svojstvenu vrijednost  $\lambda$  od  $A$  je njena geometrijska kratnost manja ili jednaka od algebarske kratnosti.

Općenitije, ako je  $A : X \rightarrow X$  linearni operator na vektorskom prostoru  $X$  (ne nužno konačno-dimenzionalnom), kažemo da je  $\lambda \in \mathbf{C}$  svojstvena vrijednost od  $A$  ako postoji  $x \neq 0$  (svojstveni vektor) takav da je  $Ax = \lambda x$ . Ako je  $\dim X < \infty$ , onda se možemo definirati i karakteristični polinom linearnog operatora  $A$  tako da gledamo najprije matricu  $\mathbf{A}$  tog operatora u bilo kojoj odabranoj bazi od  $X$ , i zatim njen karakteristični polinom  $k(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbf{A})$ . Karakteristični polinom linearnog operatora  $A$  ne ovisi o izboru baze u  $X$ .

Npr. za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

je  $k(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$ ,  $\sigma(A) = \{3, 1\}$ . Prostor  $E(3) = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$  je dvodimenzionalan. Algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti 3 iznose 2. S druge strane, za

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

je prostor  $E(3) = \mathbf{R} \times \{0\} \times \{0\}$  jednodimenzionalan. Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti 3 iznosi 2, dok je njena geometrijska kratnost jednaka 1.

Za vektorski potprostor  $E$  od  $X$  kažemo da je **invarijantan potprostor** linearnog operatora  $A: X \rightarrow X$  ako je  $Ax \in E$  za sve  $x \in E$ , ili kraće,  $A(E) \subseteq E$ . Odabirom baze  $\{e_1, \dots, e_k\}$  u  $E$  i nadopunjavanjem do baze u  $X$  dolazimo do baze u kojoj matrica operatora  $A$  ima **reducirani oblik**:

$$A = \begin{bmatrix} C & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

gdje je  $C$  matrica reda  $\dim E$ . Ako operator  $A$  ima dva invarijantna prostora  $E$  i  $F$ , takva da je  $X = E \oplus F$ , onda odabirom dviju baza u svakoj od njih dolazimo do baze u  $X$  u kojoj će matrica operatora  $A$  imati ovakav reducirani oblik (dijagonalna blok-matrica):

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

gdje je  $C$  matrica reda  $\dim E$ , a  $D$  reda  $\dim F$ . Jedan od razloga zašto je reducirani oblik važan je što je potenciranje dijagonalnih blok matrica vrlo jednostavno:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Tvrdnja vrijedi i za bilo koji broj dijagonalnih blokova u matrici.

Npr. svaki svojstveni potprostor  $E(\lambda)$  matrice  $A$ , gdje je  $\lambda \in \sigma(A)$ , je invarijantan potprostor: ako je  $x \in E(\lambda)$ , onda je  $Ax = \lambda x \in E(\lambda)$ .

Za dvije kvadratne matrice  $A$  i  $B$  istog reda kažemo da su **slične** ako postoji regularna matrica  $T$  takva da je  $B = T^{-1}AT$ . Pišemo  $A \sim B$ . Slične matrice imaju iste determinante. *Svaka matrica s kompleksnim koeficijentima je slična gornjoj trokutastoj matrici, s matricom sličnosti koja se može odabrati unitarnom (Schurov teorem).*

Ova tvrdnja ne vrijedi ako dopuštamo samo realne koeficijente u matrici sličnosti. Npr. matrica

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(matrica operatora rotacije ravnine oko ishodišta za kut  $\pi/2$ ) slična je matrici

$$\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

ako za matricu sličnosti dopustimo kompleksne koeficijente. Ako dopuštamo samo realne koeficijente u matrici sličnosti, onda  $J$  nije slična niti kojoj gornjoj trokutastoj matrici. Postoje gornje trokutaste matrice koje nisu slične dijagonalnoj. Takva je npr. **matrica zakošenja**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vrlo lako je vidjeti da ako matrica  $A$  reda  $n$  ima  $n$  različitih svojstvenih vrijednosti, onda je slična dijagonalnoj matrici a matrica sličnosti je  $T = [e_1, \dots, e_n]$ , gdje su  $e_i$  svojstveni vektori matrice  $A$ .

Neka je  $\mathbf{A}$  matrica linearnog operatora  $A : X \rightarrow X$  u bazi  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , a  $\mathbf{B}$  neka je matrica istog linearnog operatora u nekoj drugoj bazi  $\{f_1, \dots, f_n\}$  u  $X$ . Onda je  $\mathbf{B} = T^{-1}\mathbf{A}T$ , gdje je  $T$  matrica prijelaza iz prve baze u drugu. Kako su determinante matrica  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  iste, vidimo da time možemo definirati i determinantu linearnog operatora  $A : X \rightarrow X$  sa  $\det A := \det \mathbf{A}$ . Npr. determinanta operatora deriviranja  $A : P_n \rightarrow P_n$ ,  $Af = f'$ , jednaka je nula.

U primjenama se vrlo često susreću simetrične kvadratne matrice. Matrica  $A$  je **simetrična** ako je realna i  $A^\top = A$ . Svaka simetrična matrica  $A$  slična je dijagonalnoj. U tom slučaju kažemo još da se simetrična matrica može **dijagonalizirati**. Štoviše, vrijedi ovaj teorem.

Ako je  $A$  simetrična matrica, onda postoji **ortogonalna matrica**  $S$  (tj.  $S^\top S = SS^\top = I$ , tj.  $S^{-1} = S^\top$ ) takva da je

$$S^\top AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Pritom su sve svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  realne, a  $S = [e_1, \dots, e_n]$ , gdje su  $e_i$  ortonormirani svojstveni vektori matrice  $A$ , tj.  $\|e_i\| = 1$  i  $Ae_i = \lambda_i e_i$ .

U dokazu važnu ulogu igra činjenica da za svaku realnu matricu  $A$  i  $x, y \in \mathbf{R}^n$  vrijedi  $(Ax|y) = (x|A^\top y)$ . Ovo pak slijedi odmah iz definicije skalarnog produkta u  $\mathbf{R}^n$ :  $(x|y) = x^\top \cdot y$ , gdje je  $\cdot$  matrično množenje (u ovom slučaju množimo vektor redak s vektorom stupcem). Naime,  $(Ax|y) = (Ax)^\top \cdot y = (x^\top A^\top)y = x^\top \cdot (A^\top y) = (x|A^\top y)$ . Nije teško vidjeti da je matrica  $A$  simetrična onda i samo onda ako za sve  $x, y \in \mathbf{R}^n$  vrijedi jednakost

$$(Ax|y) = (x|Ay).$$

Važne ortogonalne matrice reda 2 su matrica rotacije ravnine za kut  $\varphi$  oko ishodišta i matrica simetrije ravnine oko pravca kroz ishodište:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokazuje se da su (do na sličnost) ovo jedine ortogonalne matrice reda 2, tj. svaka ortogonalna matrica je slična jednoj od ove dvije.

U slučaju kad radimo s matricama s kompleksnim koeficijentima, onda rabimo skalarni produkt  $(x|y) = x^\top \cdot \bar{y}$ , gdje su  $x, y \in \mathbf{C}^n$ , a  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ ,  $y_i \in \mathbf{C}$ . Ovdje nam  $\bar{z}$  za  $z \in \mathbf{C}$  označava uobičajeni konjugirano kompleksni broj od  $z$ , tj. za  $z = x + iy$  je  $\bar{z} = x - iy$ . Neka je zadana matrica  $A$  s kompleksnim koeficijentima. Matricu  $A^* = \bar{A}^\top$ , gdje je  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ , zovemo **hermitski konjugiranom matricom** od  $A$ . Lako se provjeri da za svaku kvadratnu matricu  $A$  s kompleksnim koeficijentima vrijedi  $(Ax|y) = (x|A^*y)$ , za sve  $x, y \in \mathbf{C}^n$ .

Za kompleksnu matricu  $A$  kažemo da je **hermitska** ako je  $A^* = A$ . Svaka hermitska matrica je slična dijagonalnoj. Točnije, ako je  $A^* = A$  onda postoji **unitarna matrica**  $S$  (tj.  $S^*S = SS^* = I$ , tj.  $S^{-1} = S^*$ ) takva da je

$$S^*AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti od  $A$  su realne i postoji ortonormirana baza  $\{e_1, \dots, e_n\}$  u  $\mathbb{C}^n$  koju čine svojstveni vektori od  $A$ , takva da je  $S = [e_1, \dots, e_n]$ .

U dokazu ključnu ulogu igra činjenica da za svaku kompleksnu kvadratnu matricu  $A$  i  $x, y \in \mathbb{C}^n$  vrijedi jednakost

$$(Ax|y) = (x|A^*y).$$

Ona slijedi iz  $(Ax|y) = (Ax)^\top \cdot \bar{y} = (x^\top A^\top) \bar{y} = x^\top \cdot (\overline{A^\top y}) = x^\top \cdot (\overline{A^\top} \bar{y}) = x^\top \cdot (\overline{A}^* \bar{y}) = (x|A^*y)$ . Kompleksna matrica  $A$  je hermitska onda i samo onda ako je  $(Ax|y) = (y|Ax)$  za sve  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

Kraće kažemo da je *svaka simetrična (hermitska) matrica ortogonalno (unitarno) slična dijagonalnoj*. Taj rezultat vrijedi inače i za mnogo općenitije matrice, tzv. normalne matrice. Za matricu  $A$  s kompleksnim koeficijentima kažemo da je **normalna matrica** ako komutira s  $A^*$ , tj.  $AA^* = A^*A$ . Svaka simetrična matrica je normalna.

Lako se vidi da je matrica  $S$  je ortogonalna (unitarna) onda i samo onda ako vrijedi  $(Sx|Sy) = (x|y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ( $\in \mathbb{C}^n$ ), tj. ako čuva skalarni produkt. Štoviše, matrica  $S$  je ortogonalna (unitarna) onda i samo onda ako čuva normu vektora, tj.  $\|Sx\| = \|x\|$ , za sve  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\in \mathbb{C}^n$ ). Posebno, onda ortogonalna (unitarna) matrica  $S$  shvaćena kao linearni operator iz  $\mathbb{R}^n$  u  $\mathbb{R}^n$  (iz  $\mathbb{C}^n$  u  $\mathbb{C}^n$ ) čuva i udaljenost među vektorima  $x$  i  $y$ , tj.  $\|Sx - Sy\| = \|x - y\|$ . Za neku funkciju (ne nužno linearnu)  $f: X \rightarrow X$ , gdje je  $X$  normiran prostor, kažemo da je **izometrija** ako čuva udaljenost, tj.  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ . Prema tome ortogonalna (unitarna) matrica je (linearna) izometrija na prostoru  $X = \mathbb{R}^n$ .

Pokazuje se da je umnožak dviju ortogonalnih (unitarnih) matrica istog reda opet ortogonalna (unitarna) matrica. Odatle slijedi da je skup svih ortogonalnih (unitarnih) matrica zadanog reda grupa s obzirom na množenje matrica. Također, ako je matrica  $A$  ortogonalna (unitarna), onda je i  $A^\top$  ( $A^*$ ) takva. Ovo zadnje svojstvo može se izreći i na ovaj iznenađujuć način: stupci neke matrice su međusobno okomiti i jedinični vektori onda i samo onda ako su njeni redci međusobno okomiti i jedinični vektori!

Ako je  $A$  simetrična (ili hermitska) matrica, te ako je  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormiran skup svojstvenih vektora od  $A$  s pripadnim svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi

$$Ax = \lambda_1(x|e_1)e_1 + \dots + \lambda_n(x|e_n)e_n,$$

**(spektralni teorem).** To slijedi odmah iz  $x = (x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_n)e_n$  množenjem s  $A$  (s lijeva) i  $Ae_k = \lambda_k e_k$ .

## 1.8. Hahn-Banachov teorem i Fredholmova alternativa

Fredholmova alternativa bavi se pitanjem rješivosti linearnih jednačaba. Njen dokaz zasniva se na primjeni Hahn-Banachova teorema. Naša razmatranja su omeđena samo na konačno-dimenzionalan slučaj, iako se oba rezultata koji slijede mogu formulirati i u znatno općenitijoj situaciji. Formulirajmo najprije konačno-dimenzionalnu inačicu Hahn-Banachova teorema.

**Teorem. (Hahn-Banach)** Neka je  $Z$  potprostor od  $\mathbf{C}^n$  i  $b \in \mathbf{C}^n \setminus Z$ . Onda postoji  $y_0 \in \mathbf{C}^n$  takav da je  $(y|y_0) \neq 0$  i  $(y|z) = 0$  za sve  $z \in Z$ .

DOKAZ. Pogledajmo prostor  $Z_1 = L(Z \cup \{y\})$ . Dimenzija mu je  $\dim Z + 1$ . Ortogonalni komplement od  $Z$  u prostoru  $Z_1$  je jednodimenzionalan, razapet s nekim vektorom  $y_0$ . Taj vektor ima tražena svojstva. Q.E.D.

**Propozicija.** Neka je  $A : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  linearni operator (ili kompleksna matrica reda  $n$ ). Onda je  $R(A) = N(A^*)^\perp$ , gdje je  $R(A)$  slika od  $A$ , a  $N(A^*)$  nul-potprostor od  $A^*$ .

DOKAZ. Dokažimo  $R(A) \subseteq N(A^*)^\perp$ . Neka je  $y = Ax \in R(A)$ . Odaberimo bilo koji  $z \in N(A^*)$ . Onda je  $(y|z) = (Ax|z) = (x|A^*z) = 0$ , tj.  $y \perp z$ , tj.  $y \in N(A^*)^\perp$ . Obratno, dokažimo  $N(A^*)^\perp \subseteq R(A)$ . Pretpostavimo suprotno, da postoji element  $y \in N(A^*)^\perp$  takav da  $y \notin R(A)$ . Cilj nam je doći do protuslovlja. Prema Hahn-Banachovu teoremu postoji  $y_0 \in \mathbf{C}^n$  takav da je  $(y|y_0) \neq 0$  i  $y_0 \perp R(A)$ , tj.  $(Ax|y_0) = 0$  za sve  $x \in \mathbf{C}^n$ . Prema tome je i  $(x|A^*y_0) = 0$  za sve  $x$ , dakle  $A^*y_0 = 0$ , tj.  $y_0 \in N(A^*)$ . Zbog  $(y|y_0) \neq 0$  onda slijedi da  $y \notin N(A^*)^\perp$  (u suprotnom bi bilo  $(y|y_0) = 0$ ). To je međutim protuslovlje. Q.E.D.

Neka je zadan linearni operator  $A : X \rightarrow X$ , gdje je prostor  $X$  konačno-dimenzionalan. Skup  $\rho(A) := \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$  zovemo **rezolventnim skupom od  $A$** . Razlog za taj naziv vidljiv je iz sljedećeg teorema.

**Teorem. (Fredholmova alternativa)** Neka je  $A$  kompleksna kvadratna matrica.

a) Za svaki  $\lambda \in \rho(A) := \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$  (rezolventni skup od  $A$ ) i svaki  $y \in \mathbf{C}^n$  postoji jedinstven  $x \in \mathbf{C}^n$  takav da je

$$\lambda x - Ax = y.$$

b) Neka je  $\lambda \in \sigma(A)$  i  $y \in \mathbf{C}^n$  zadan. Jednadžba  $\lambda x - Ax = y$  je rješiva po  $x$  onda i samo onda ako je  $y \in N(\overline{\lambda}I - A^*)^\perp$ , tj.  $y$  ima svojstvo da je  $(y|z) = 0$  za sve  $z$  koji su rješenja dualne jednadžbe  $A^*z = \overline{\lambda}z$ .

DOKAZ. a) Za  $\lambda \in \rho(A)$  je matrica  $\lambda I - A$  regularna, pa iz  $(\lambda I - A)x = y$  slijedi  $x = (\lambda I - A)^{-1}y$ .

b) Pretpostavimo da je  $y$  takav da je jednadžba  $(\lambda I - A)x = y$  rješiva po  $x$ . Odaberimo  $z \in N(\overline{\lambda}I - A^*)$ . Onda je  $(\lambda I - A)x|z) = (y|z)$ . Lijeva strana je međutim  $(x|(\overline{\lambda}I - A^*)z) = 0$ , dakle  $(y|z) = 0$ , tj.  $y \perp z$ . Kako to vrijedi za sve  $z \in N(\overline{\lambda}I - A^*)$ , onda je  $y \perp N(\overline{\lambda}I - A^*)$ .

Obratno, neka je  $y \in N(\overline{\lambda}I - A^*)^\perp$ . Kako je ovaj ortogonalni komplement jednak  $R(\lambda I - A)$ , onda postoji  $x$  takav da je  $y = (\lambda I - A)x$ . Q.E.D.

## 1.9. Crtice iz povijesti linearne algebre

Ovdje ćemo dati samo mali izbor imena matematičara koji su ostvarili važne rezultate u području linearne algebre. Svi su oni mnoge rezultate ostvarili i u drugim područjima matematike.

Čini se da linearna algebra kao ozbiljna znanstvena disciplina započinje s njemačkim matematičarom *Carlom Friedrichom Gaussom* (1777-1855). Svi znamo za Gaussovu metodu eliminacije za rješavanje sustava jednačaba. Važne su Gauss-Jordanova metoda i Gauss-Seidelova metoda. Poznat je među inim i po tome što su svi njegovi objavljeni radovi nevjerovatno dotjerani, potpuni i koncizni.

Vrlo je važan irski matematičar *William Rowan Hamilton* (1805-1865). Uveo je pojam kvaterniona, koji prethodi pojmu vektora. Poznat je Hamilton-Cayleyev teorem, koji kaže da matrica poništava svoj karakteristični polinom. Otac mu je bio lingvist, pa je mali Hamilton već sa pet godina mogao čitati engleski, hebrejski, latinski i grčki, a u trinaestoj godini je svladao ne samo sve glavne europske jezike, nego i sanskrt, kineski, perzijski, arapski, malajski i hindi.

Njemački matematičar *Carl Gustav Jacobi* (1804-1851) bavio se teorijom determinanata, a uveo ono što danas zovemo jakobijanom (pojavljuje se npr. kod zamjene varijabla u višestrukom integralu u Matematici II). Pokazao je da je  $n$  realnih funkcija s  $n$  realnih varijabala linearno nezavisno onda i samo onda ako njihov jakobijan nije identički jednak nula. Poznat je kao izvrstan predavač kojeg su studenti voljeli. Bio je protiv svladavanja pretjerane količine matematičkog gradiva u nastavi.

Algebru matrica (množenje i zbrajanje) razvio je engleski matematičar *Arthur Cayley* (1821-1895). Važni su njegovi prilozi u teoriji determinanata i višedimenzionalnoj geometriji. Simpatično je da se cio život bavio i planinarenjem.

Determinante su se pojavile jedno stoljeće prije matrica. Naziv *matrica* iskovao je britanski matematičar *James Joseph Sylvester* (1814-1897), u značenju “majka determinanata”. Još je *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) rabio determinante. Najopsežnije priloge teoriji determinanata dao je *Augustin-Louis Cuachy* (1789-1857). Njemu pripada i prvi dokaz da je  $\det AB = \det A \det B$ , kao i definicija karakterističnog polinoma matrice. Cauchy je među inim prvi uveo strogu definiciju limesa slijeda. Spomenimo i ime *Charlsa Dogdgsone* (1832-1898), koji je napisao opsežnu knjigu o determinantama. Dodgson je mnogo poznatiji pod svojim pseudonimom Lewis Carrol (autor knjige Alisa u zemlji čudesa).

Američki matematičar *Josiah Willard Gibbs* (1839-1903) začetnik je vektorske analize, o kojoj je objavio i monografiju. Uveo je pojam usmjerene dužine, vektora, jednakost vektora, zbrajanje vektora, množenje sa skalarom, vektorske i skalarne projekcije, kao što ih definiramo i danas.

## 2.

# Rješavanje sustava jednačaba iterativnim metodama

### 2.1. Matrične norme i konvergencija matrica

Neka je  $M_{mn}$  vektorski prostor svih realnih (ili kompleksnih) matrica  $A$  tipa  $m \times n$ . Gledajući matricu  $A$  kao linearni operator iz  $\mathbf{R}^n$  u  $\mathbf{R}^m$  ( $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^m$ ), možemo na prirodan način definirati operatorsku normu od  $A$ , generiranu sa zadanim normom na  $\mathbf{R}^n$  i još jednom normom na  $\mathbf{R}^m$ :  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$ . S tom matričnom normom vektorski prostor  $M_{mn}$  postaje normiran prostor. Kako je on konačno-dimenzionalan (dimenzije  $mn$ ) onda je to Banachov prostor, tj. svaki Cauchyjev slijed u njemu konvergira: ako  $\|A_k - A_l\| \rightarrow 0$  kada  $k, l \rightarrow \infty$  onda slijed matrica  $A_k$  konvergira k nekoj matrici  $A$ .

Npr., uzimajući  $\infty$ -normu na  $\mathbf{R}^n$  i  $\mathbf{R}^m$  dobivamo matričnu normu

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(računamo maksimum zbrojeva po redcima u matrici, pa se zato ta norma nekad zove i **redčana norma**).

DOKAZ. Uzmimo bilo koji  $x \in \mathbf{R}^n$ . Za  $y = Ax$  je

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\infty} &= \max_i |y_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_j |x_j| \cdot \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Treba još samo vidjeti da je izraz  $\|A\|_{\infty}$  doista najmanji za koji vrijedi ova nejednakost. Dovoljno je pronaći vektor  $x$  norme 1 za koji je  $\|Ax\|_{\infty} = \|A\|_{\infty}$ . Neka je  $i_0$  indeks (retka) na kojem se dostiže maksimum redčane norme. Stavimo  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,

$x_j = \operatorname{sgn} a_{i_0 j}$ . Onda je  $a_{i_0 j} x_j = |a_{i_0 j}|$ , pa za  $y = Ax$  vrijedi  $y_{i_0} = \|A\|_\infty$ . Kako za sve  $i$  vrijedi  $|y_i| = |\sum_j a_{ij} x_j| \leq \sum_j |a_{ij}| \leq |y_{i_0}|$ , onda je  $\|A_x\|_\infty = \|y\|_\infty = |y_{i_0}| = \|A\|_\infty$ .  
Q.E.D.

Na sličan način, uzimajući  $\infty$ -normu na  $\mathbf{R}^n$  i  $\mathbf{R}^m$  dobivamo operatorsku normu

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(računamo maksimum zbrojeva po stupcima u matrici, pa ju zato zovemo i **stupčanom normom**). Primijetite da je  $\|A\|_1 = \|A^\top\|_\infty$ , jer transponiranjem redci matrice  $A$  postaju stupci matrice  $A^\top$ . Za obje matrice norme vrijedi važna nejednakost

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

pod uvjetom da su  $A$  i  $B$  ulančane.

Kad imamo matricnu normu onda možemo definirati i udaljenost među matricama  $A$  i  $B$  istog tipa:  $d(A, B) = \|A - B\|$ . To nam omogućava da uvedemo i pojam kugle u prostoru matrica. Pojam udaljenosti omogućava da uvedemo konvergenciju slijeda matrica.

Pretpostavimo da je zadan slijed matrica  $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , istog tipa  $m \times n$ . Kažemo da **slijed matrica**  $A^{(k)}$  **konvergira** k matrici  $A = (a_{ij})$ , i pišemo  $A^{(k)} \rightarrow A$  kad  $k \rightarrow \infty$ , ili  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$ , ako  $\|A^{(k)} - A\| \rightarrow 0$  kad  $k \rightarrow \infty$ , gdje je  $\|\cdot\|$  bilo koja matricna norma. Kako je prostor matrica  $M_{mn}$  konačno-dimenzionalan (dimenzije  $mn$ ), sve matricne norme na njemu su međusobno ekvivalentne, pa definicija konvergencije ne ovisi o izboru norme.

Uvjet  $A^{(k)} \rightarrow A$  je ekvivalentan s uvjetom da  $a_{ij}^{(k)} \rightarrow a_{ij}$  kad  $k \rightarrow \infty$ , za sve  $i, j$ .

Drugim riječima, slijed matrica  $A^{(k)}$  konvergira matrici  $A$  ako odgovarajući matricni koeficijenti konvergiraju na uobičajen način.

Doista, ako je ispunjen ovaj zadnji uvjet, onda pišući  $A^{(k)} - A = \sum_{i,j} (a_{ij}^{(k)} - a_{ij}) E_{ij}$ , gdje je  $E_{ij}$  matrica koja je nula svuda osim na mjestu  $(i, j)$  na koje stavljamo jedinicu, dobivamo zbog nejednakosti trokuta  $\|A^{(k)} - A\| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \cdot \|E_{ij}\| \rightarrow 0$  kada  $k \rightarrow \infty$ .

Npr. slijed matrica

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{k})^k & \frac{k+1}{k} \\ \frac{1}{k} & k \sin \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

konvergira prema matrici

$$A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na sličan način može se uvesti konvergencija beskonačnog reda matrica određenog slijedom matrica  $A^{(k)}$  istog tipa. Najprije gledamo parcijalne sume  $S_k := A^{(1)} + \dots + A^{(k)}$ . Kažemo da **red matrica**  $\sum_{k=1}^\infty A^{(k)}$  **konvergira** ako slijed parcijalnih suma  $S_k$  konvergira k matrici  $S$ , tj.  $\|S - S_k\| \rightarrow 0$ . U tom slučaju pišemo  $\sum_{k=1}^\infty A^{(k)} = S$ . Red matrica  $\sum_{k=1}^\infty A^{(k)}$  konvergira onda i samo onda ako redovi brojeva  $\sum_{k=1}^\infty a_{ij}^{(k)}$  konvergiraju k nekom broju  $s_{ij}$  za sve  $i, j$ .



Npr.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{x^k}{k!} & (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} & \frac{1}{(k+1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & \cos x \\ \sin x & \frac{\pi^2}{6} \end{bmatrix}$$

za sve  $x \in \mathbf{R}$ . U praksi će se konvergencija reda najčešće provjeravati s pomoću neke norme, tj. preko uvjeta  $\|S - S_k\| \rightarrow 0$ .

Važan primjer je matrica  $e^A$ , koju zovemo **eksponencijalna funkcija matrice**. Za bilo koju zadanu kvadratnu matricu  $A$  ona se definira s pomoću MacLaurinova reda funkcije  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  ovako:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Da bi dokazali da taj red konvergira prema nekoj matrici, dovoljno je pokazati slijed  $S_k = I + A + \dots + \frac{A^k}{k!}$  parcijalnih suma čini Cauchyjev niz. Neka je  $l < k$  i pokažimo da  $S_k - S_l = \frac{A^{l+1}}{(l+1)!} + \dots + \frac{A^k}{k!}$  teži prema nuli kada  $k$  i  $l$  teže u  $\infty$ . Rabeći bilo koju matričnu normu i činjenicu da je  $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ , dobivamo

$$\|S_k - S_l\| \leq \frac{\|A^{l+1}\|}{(l+1)!} + \dots + \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^{l+1}}{(l+1)!} + \dots + \frac{\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0$$

kada  $k, l \rightarrow \infty$ . Naime numerički red  $e^{\|A\|} = 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \dots$  konvergira (npr. po D'Alambertovu kriteriju), pa njegove parcijalne sume konvergiraju. Na sličan način može se definirati matrica  $\sin A$ ,  $\cos A$ , pa i općenito  $f(A)$  uz određene uvjete na  $f$ . Dovoljno je da radius konvergencije MacLaurinovog reda analitičke funkcije  $f$  bude veći od spektralnog radiusa matrice  $A$ .

Ako je  $A$  dijagonalna matrica,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onda je i  $P(A)$  dijagonalna matrica

$$P(A) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & P(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da je i  $e^A$  dijagonalna matrica:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Ako je  $A$  gornja trokutasta matrica, onda je  $P(A)$  gornja trokutasta, kao i  $e^A$ . Na dijagonali su isti brojevi kao u dijagonalnom slučaju.

Pogledajmo za ilustraciju gornju trokutastu matricu

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

i nađimo  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ , gdje je  $t$  bilo koji realni broj. Indukcijom se lako vidi da je

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix},$$

dakle

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{bmatrix}.$$

Zbog  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}t^k}{k!} = t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = [j := k-1] = t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^j}{j!} = te^{\lambda t}$  dobivamo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$