

2. Pojam funkcije

Funkcija ili **preslikavanje** je svaka uređena trojka (f, A, B) , pri čemu su A i B neprazni skupovi, a f pravilo koje svakom elementu iz A pridružuje točno jedan element iz B .

Oznaka: $f : A \rightarrow B$ ili $x \mapsto y = f(x)$.

- $A =$ je domena ili područje definicije funkcije f ,
- $B =$ je kodomena ili područje vrijednosti funkcije f ,
- $x \in A$ je argument funkcije f ,
- $f(x) \in B$ se naziva slika elementa $x \in A$ ili funkcijska vrijednost od f na x ,

Istaknimo: po definiciji se *svakom* elementu iz A pridružuje *točno jedan* element iz B .

Može se desiti:

- različiti elementi domene se preslikavaju u isti element kodomene,
- u neki element kodomene se ne preslikava niti jedan element domene.

Ne može se desiti:

- neki element domene se preslikava u dva različita elementa kodomene,
- za neki element domene ne znamo u što se preslikava.

Primjeri

- ❶ Ako je A konačan skup, tada funkciju možemo zadati tako da ispišemo vrijednosti $f(x)$ za sve $x \in A$. Na primjer, jedna funkcija $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow [1, 2]$ zadana je sa

$$f(1) = 1, f(2) = \sqrt{2}, f(3) = \sqrt{3}, f(4) = 2.$$

Ovu istu funkciju mogli smo zapisati i kao

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow [1, 2], \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

- ❷ Svaki niz je, po definiciji, funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva.
- ❸ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ je funkcija kvadriranja.

Realne funkcije realne varijable

Funkciju čija je domena podskup od \mathbb{R} nazivamo **funkcijom realne varijable**, a ako joj je kodomena podskup od \mathbb{R} , onda kažemo da je to **realna funkcija**.

Mi ćemo promatrati realne funkcije realne varijable, dakle $f : A \rightarrow B$ gdje su A i B podskupovi od \mathbb{R} .

Iako je funkcija zadana svojom domenom A , kodomenom B i pravilom pridruživanja f , ponekad ćemo pisati samo pravilo pridruživanja. U tim ćemo slučajevima podrazumijevati da je domena maksimalan podskup od \mathbb{R} na kojem to pravilo ima smisla (tzv. **prirodna domena** ili **prirodno područje definicije** D_f ili $D(f)$), a za kodomenu ćemo uzimati \mathbb{R} .

Na primjer, ako zadamo $f(x) = \sqrt{x}$, tada podrazumijevamo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$.

Isto tako, $g(x) = \frac{1}{x}$, podrazumijeva $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}$.

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju istu domenu, istu kodomenu i ako na isti način elementima iz domene pridružuju elemente kodomene.

Drugim riječima, funkcije $f : A_1 \rightarrow B_1$ i $g : A_2 \rightarrow B_2$ su jednake ako i samo ako je

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \\ f(x) = g(x), \quad \forall x \in A_1 = A_2.$$

Primjeri!

Neka je $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ dvije funkcije. **Kompozicija funkcija** g i f je nova funkcija $g \circ f : A \rightarrow C$ definirana formulom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Uočimo da se funkcije mogu komponirati jedino onda kad se domena vanjske funkcije g podudara s kodomenom unutrašnje funkcije f . To znači da postojanje kompozicije $g \circ f$ uopće ne jamči da će i kompozicija $f \circ g$ biti definirana. U posebnim slučajevima kad imamo u igri samo jedan skup, recimo A , i funkcije $f : A \rightarrow A$ i $g : A \rightarrow A$, definirane su obje kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$. No čak ni tada općenito ne vrijedi $g \circ f = f \circ g$. Primjer!

Kažemo da je funkcija $f : A \rightarrow B$

- **injekcija**, ako za $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$ (ili, ekvivalentno, ako su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$, tada je $x_1 = x_2$).
- **surjekcija**, ako za svaki $y \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = y$.
- **bijekcija**, ako je surjekcija i injekcija, tj. ako za svaki $y \in B$ postoji jedinstven $x \in A$ takav da je $f(x) = y$.

Slika funkcije $f : A \rightarrow B$ je skup

$$R(f) = R_f = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B.$$

Uočimo da je $f : A \rightarrow R_f$ uvijek surjekcija.

Na primjer, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nije surjekcija, jer ne postoji $x \in \mathbb{R}$ za kojeg bi vrijedilo $f(x) = -1$, a -1 pripada kodomeni. Slika ove funkcije je $R_f = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$, pa je funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$ surjekcija.

Neka je f realna funkcija realne varijable (dakle, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$).

- f je **rastuća**, ako $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- f je **strogo rastuća**, ako $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- f je **padajuća**, ako $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- f je **strogo padajuća**, ako $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- f je **monotona** ako rastuća ili strogo rastuća ili padajuća ili strogo padajuća.

Graf rasteće/strogo rasteće/padajuće/strogo padajuće funkcije je rastuća/strogo rastuća/padajuća/strogo padajuća krivulja.

Uočimo da je niz (a_n) rastući/padajući ako je rastući/padajući kao funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Općenito će se rijetko dogoditi da neka funkcija raste (pada) na cijeloj domeni. Na primjer, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nije ni rastuća ni padajuća, ali na $\langle -\infty, 0 \rangle$ pada i na $[0, \infty)$ raste. Dakle, možemo naći podskupove domene na kojima funkcija raste, odnosno pada.

Neka je $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je $A = \mathbb{R}$, $A = \langle -a, a \rangle$ ili $A = [-a, a]$ za neki $a \in \mathbb{R}$ (dakle, domena funkcije je simetrična).

- f je **parna**, ako je $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in A$.
- f je **neparna**, ako je $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in A$.

Na primjer, funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je parna funkcija, a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ neparna funkcija.

Graf parne funkcije je osno simetričan s obzirom na y -os, dok je graf neparne funkcije simetričan s obzirom na ishodište.

Za zadanu funkciju $f : A \rightarrow B$ želimo konstruirati novu funkciju koja bi djelovala inverzno, tj. element $f(x)$ bi preslikala u x , za svaki $x \in A$. Takvu funkciju nazivali bismo inverzna funkcija funkcije f i označavali s f^{-1} .

Kada se inverzna funkcija može definirati?

- Moramo znati kako f^{-1} djeluje na svakom elementu iz B . To znači da svi elementi iz B moraju biti oblika $f(x)$ za neki $x \in A$. Drugim riječima, f mora biti surjekcija.
- Ako f nije injekcija onda postoje različiti $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Onda bi f^{-1} element $f(x_1) = f(x_2)$ preslikavao i u x_1 i u x_2 , što ne može biti po definiciji funkcije. Prema tome, f mora biti injekcija.

Prema tome, f^{-1} postoji ako i samo ako je f bijekcija.

Neka je $f : A \rightarrow B$ bijekcija. Inverzna funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$ definira se formulom $f^{-1}(y) = x$, pri čemu je $x \in A$ onaj jedinstveni $x \in A$ za kojeg je $f(x) = y$.

Teorem

- ❶ *Kompozicija injekcija je injekcija.*
- ❷ *Kompozicija surjekcija je surjekcija.*
- ❸ *Kompozicija bijekcija je bijekcija.*
- ❹ *Ako je $g \circ f$ injekcija, onda je f injekcija.*
- ❺ *Ako je $g \circ f$ surjekcija, onda je g surjekcija.*
- ❻ *Strogo rastuća funkcija je injekcija.*
- ❼ *Strogo padajuća funkcija je injekcija.*
- ❽ *Parna funkcija nije injekcija.*
- ❾ *Ako je $f : A \rightarrow B$ bijekcija, tada je inverzna funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$ također bijekcija i vrijedi*

$$f(f^{-1}(b)) = b, \quad \forall b \in B, \quad f^{-1}(f(a)) = a, \quad \forall a \in A.$$