

Tomislav Petković

ZADACI IZ FIZIKE

**Zbirka zadataka za studente
Prehrambeno - biotehnološkog fakulteta
Sveučilišta u Zagrebu**

Zagreb, 2006.

© Prof. dr. sc. Tomislav Petković, 2000.

Urednik

Prof. dr. sc. Neven Elezović

Nakladnik

Element, Zagreb

Za nakladnika

Sandra Gračan, dipl. inž.

Design ovitka

Julija Vojković

Tisak

Element, Zagreb

Intelektualno je vlasništvo, poput svakog drugog
vlasništva, neotuđivo, zakonom zaštićeno i mora se
poštivati. Nijedan dio ove knjige ne smije se preslikati niti
umnažati na bilo koji način, bez pismenog dopuštenja
nakladnika.

Predgovor

Rješavanje zadataka i problema prema predavanjima iz fizike su jedno od temeljnih načela studija fizike na modernim inženjerskim fakultetima. Predavanja su kvalitetna, tek onda, kad su upotpunjena odgovarajućim laboratorijskim i auditornim vježbama kojima se ona potpuno razumijevaju.

Zbirka zadataka *Zadaci iz fizike* za studente prve godine *Prehrambeno-biotehnoškog fakulteta* Sveučilišta u Zagrebu, metodološki se nadovezuje na udžbenik *Fizike za PBF-studij*, koji se sada tiska kao zavodska skripta. Priprema se i istoimeni sveučilišni udžbenik u izdanju istog uglednog nakladnika *Element*. *Zadaci iz fizike*, u ovakvome obliku i opsegu, izlaze prije svega da bi olakšali i ubrzali izvođenje auditornih vježbi jer će studenti tekst zadataka, koji će se rješavati na vježbama, imati u svojim rukama. Većina zadataka se metodološki temeljito rješava na auditornim vježbama (seminar), a preostale zadatke studenti samostalno rješavaju. U tome će im naročito pomagati *Pregled formula iz fizike*, svojevrsni *kompandij* klasične i osnova moderne fizike koji ova zbirka sadrži. Naročito sam nastojao, gdje god je to bilo moguće, izabrati primjere koji će studentima PBF-a koristiti u daljnjem studiju i u predmetima iz polja mikrobiologije i molekularne biologije te prehrambenih tehnologija uopće. Većina zadataka u ovoj zbirci, bili su ispitni zadaci iz *Fizike za PBF* u proteklim godinama.

U izboru i dotjerivnu zadataka te računalnoj obradbi surađivao je *Tomislav Petković ml.*, student *FER-a* koji je najbolje iskustvo stekao na *FER-u*, ali i tijekom gimnazije (*XV. gimnazija* u Zagrebu) na državnim natjecanjima iz fizike.

Ovo izdanje, u usporedbi s prethodnim izdanjima, dopunjeno je novim zadacima, napose u poglavlju moderne fizike (*Atom, jezgra i elementarne čestice*). Dodani su primjeri kontrolnih zadataka koje se piše na kraju prvog (*zimskog*) i drugog (*ljetnog*) semestra. Dodan je i primjer *Zadatka za kućnu obradbu*, koji se zadaje tijekom semestra.

Interes studenata za kontrolne zadatke i oslobađanje od pismenog dijela ispita iz fizike, stalno raste iz godine u godinu. U tom kontekstu ova zbirka odgovara svrsi, te svakako dolazi kao korisna i studentima prijateljska knjiga.

Zasluge za lijepo i tehnički elegantno izdanje pripadaju gospođi Sandri Gračan, dok je *elemente i boje* u designu ovitka zainteresirano komponirala gospođa Julija Vojković. Imageom korica zbirka će zasigurno biti predmetom pozornosti.

U Zagrebu, rujna 2000. godine

Tomislav Petković

1880 - 1881

1881 - 1882

Sadržaj

1. MEHANIKA S MEHANIKOM TEKUĆINA	1
1.1. KLASIČNA MEHANIKA	1
1.2. MEHANIKA TEKUĆINA	6
2. TITRANJE I VALOVI	8
3. KINETIČKA TEORIJA TOPLINE I TERMODINAMIKA	10
4. ELEKTROMAGNETIZAM	11
4.1. ELEKTROSTATIKA	11
4.2. ELEKTRIČNA STRUJA I MAGNETSKO POLJE	12
4.3. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI	14
5. OPTIKA	15
5.1. GEOMETRIJSKA OPTIKA	15
5.2. FIZIKALNA OPTIKA	17
6. GRAĐA TVARI (ATOM, JEZGRA I ELEMENTARNE ČESTICE)	18
 PRIMJERI KONTROLNIH ZADAĆA	21
PRIMJER ZADATKA ZA KUĆNU OBRADBU	25
PRIMJER PISMENOG ISPITA	26
Literatura	27
 KOMPENDIJ FIZIKE ZA PBF U FORMULAMA	29
TABLICA ELEMENATA	38
VAŽNIJE FIZIKALNE KONSTANTE	39
TABLICE SVOJSTAVA ČVRSTIH MATERIJALA, KAPLJEVINA I PLINOVA	40
ATOMSKE I NUKLEARNE KONSTANTE I PODACI	41
GAUSSOVA ILI NORMALNA RAZDIOBA	42
POISSONOVA RAZDIOBA	45

1. MEHANIKA S MEHANIKOM TEKUĆINA

1.1. KLASIČNA MEHANIKA

1. Prvu polovicu puta automobil prijeđe brzinom od 80 kmh^{-1} , a drugu polovicu puta brzinom od 40 kmh^{-1} . Odredite srednju brzinu automobila.

Rješenje: $\bar{v} = 53,3 \text{ kmh}^{-1} = 14,8 \text{ ms}^{-1}$

2. Vlak se kreće brzinom od 35 ms^{-1} . U nekom trenutku vremena započinje kočenje i pri tome se brzina vlaka jednoliko mijenja do iznosa od 15 ms^{-1} na putu od 500 m. Izračunajte:

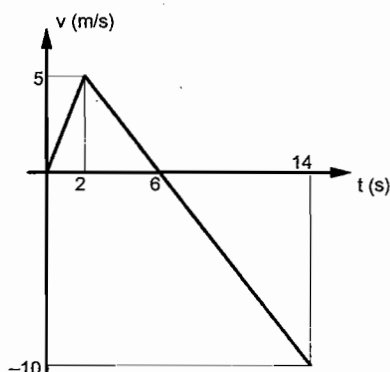
- a) akceleraciju kojom vlak usporava (deceleraciju),
b) iznos puta koji vlak prijeđe do potpunog zaustavljanja uz pretpostavku konstantnog usporavanja.

Rješenje: a) $a = -1 \text{ ms}^{-2}$, b) $s = 112,5 \text{ m}$

3. Gibanje tijela je zadano jednačbom $s = a \cdot t - b \cdot t^2 + c \cdot t^3$, gdje su $a = 2 \text{ ms}^{-1}$, $b = 3 \text{ ms}^{-2}$, $c = 4 \text{ ms}^{-3}$. Nađite srednju brzinu tijela unutar intervala $0,5 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$ i vrijeme u kojemu je akceleracija veća od nule.

Rješenje: $\bar{v} = 4,5 \text{ ms}^{-1}$, $t > 0,25 \text{ s}$

4. Zavisnost brzine o vremenu za gibanje nekog tijela, prikazano je dijagramom. Izračunajte akceleraciju kojom se tijelo ubrzava u vremenu do 2 sekunde i deceleraciju u intervalu $2 \text{ s} \leq t \leq 14 \text{ s}$. Koliki je put tijelo prevalilo u vremenu do 14 sekundi?



Rješenje: $a_1 = 2,5 \text{ ms}^{-2}$, $a_2 = -1,25 \text{ ms}^{-2}$, $s = 55 \text{ m}$

5. Rijekom koja teče brzinom $v_1 = 1 \text{ ms}^{-1}$ plovi brod čija brzina u odnosu na rijeku iznosi $v_2 = 2 \text{ ms}^{-1}$. Izračunajte brzinu kretanja broda ako:
- brod plovi nizvodno,
 - brod plovi uzvodno,
 - brod plovi okomito na smjer toka rijeke (s jedne obale na drugu).

Rješenje: a) $v = 3 \text{ ms}^{-1}$, b) $v = 1 \text{ ms}^{-1}$, c) $v = 2,24 \text{ ms}^{-1}$

6. Brod koji vozi iz mjesta A u mjesto B u jednome pravcu plovi brzinom od $v_1 = 10 \text{ km/h}$; u suprotnome pravcu plovi brzinom od $v_2 = 16 \text{ km/h}$. Izračunajte:
- srednju brzinu broda,
 - brzinu rijeke kojom brod plovi!

Rješenje: a) $v_b = 12,3 \text{ kmh}^{-1}$, b) $v_r = 0,83 \text{ ms}^{-1}$

7. Brod plovi od jedne prema drugoj obali rijeke brzinom od $7,2 \text{ km/h}$ okomito na obalu (na tijek rijeke). Na drugu obalu pristane 150 m niže od početnog usmjerenja. Izračunajte:

- brzinu rijeke,
- vrijeme potrebno da brod stigne na drugu obalu, ako je rijeka široka 500 m .

Rješenje: a) $v = 0,60 \text{ ms}^{-1}$, b) $t = 250 \text{ s}$

8. Dvojica biciklista, otac i sin, vozeći paralelno dolaze na netom otvoreno pravokutno križanje. Sin je nastavio u istom smjeru, prema školi, jednolikom brzinom od 10 km/h , a otac je morao skrenuti desno, u smjeru PBF-a gdje radi. U času skretanja brzina mu je iznosila 6 km/h , pa se odmah počeo ubrzavati akceleracijom $0,9 \text{ m/s}^2$.

Izračunajte relativnu brzinu sina prema ocu, $\vec{v}_s - \vec{v}_o$, 10 sekundi nakon razdvajanja na križanju.

Rješenje: $|\vec{v}_s - \vec{v}_o| = 39,7 \text{ km/h}$

9. Plivač prema rijeci ima brzinu v , a brzina rijeke je u . Ako je započeo preplivavanje s jedne obale brzinom v pod kutom α s obzirom na okomicu između dviju obala, koliki je kut β koji cijela njegova staza do druge obale zatvara prema okomici?

Izračunajte kut β , ako je $v = 1 \text{ m/s}$, $u = 1,5 \text{ m/s}$, $\alpha = 15^\circ$, a širina rijeke $d = 50 \text{ m}$.

Rješenje: $\beta = 61,23^\circ$

10. Sa zgrade visoke 15 m bačena je vertikalno prema tlu kuglica početnom brzinom od 10 m/s . Izračunajte vrijeme padanja kuglice. Koliko dugo bi kuglica slobodno padala? Kolika je brzina kuglice pri udaru u tlo? Zanimajte otpor zraka.

Rješenje: $t = 1 \text{ s}$, $t' = 1,7 \text{ s}$, $v_u = 19,8 \text{ m/s}$

11. Materijalna točka (sitno tijelo) krenuvši iz mirovanja giba se po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna s vremenom. Koliki je prevaljni put nakon 8 s , ako je nakon 4 s brzina točke 8 m/s ?

Rješenje: $s = 85,3 \text{ m}$

12. Zdrobljena željezna ruda pada na vodoravnu dugačku transportnu traku i to 300 kg u svakoj sekundi. Traka se kreće stalnom brzinom od 2 m/s. Nađite silu koja mora djelovati na traku da bi se ona kretala stalnom brzinom, zanemarujući trenje.

Rješenje: $F = 600 \text{ N}$

13. Dva tijela s masama $m_1 = 4 \text{ kg}$ i $m_2 = 8 \text{ kg}$ vezana su s niti i nalaze se na kosini čiji je kut $\alpha = 30^\circ$. Faktori trenja su $\mu_1 = 0,1$ i $\mu_2 = 0,2$. Koja sila nateže nit, ako se tijelo m_1 giba ispred tijela m_2 ?

Rješenje: $T = 2,3 \text{ N}$

14. Na česticu mase m djeluje sila $F = F_0 \left[1 - \left(\frac{2t - T}{T} \right)^2 \right]$ u intervalu vremena $0 \leq t \leq T$, gdje je F_0 konstantna. Potrebno je odrediti brzinu čestice na svršetku vremenskog intervala, ako čestica na početku miruje.

Rješenje: $v = \frac{2}{3} \cdot \frac{F_0 \cdot T}{m}$

15. Cesta na zavoju većinom je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja tako da bi za određenu brzinu horizontalna komponenta reakcijske sile ceste na automobil bila jednaka potrebnoj centripetalnoj sili.

a) Koliki mora biti nagib ceste na zavoju polumjera zakrivljenosti 100 m da bi automobil mogao voziti brzinom od 60 km/h neovisno o trenju?

b) Kada cesta ne bi bila nagnuta, koliki bi trebao biti minimalni faktor trenja pri toj brzini?

Rješenje: a) $\alpha = 15,8^\circ$, b) $\mu = 0,28$

16. Na mirnoj vodi nalazi se splav dugačka 10 m, mase 900 kg. Na jednom kraju mirne splavi nalazi se čovjek mase 70 kg, a na drugom kraju dječak mase 30 kg. Potrebno je odrediti novi položaj splavi prema obali ako dječak dođe na sredinu, a čovjek na drugu stranu splavi. Otpornost vode je zanemariva!

Rješenje: $\Delta x = 0,55 \text{ m}$

17. Čelična kuglica mase m_1 , gibajući se brzinom $v_1 = 9 \text{ m/s}$, centralno udara u drugu mirnu kuglicu mase $m_2 = 0,5 m_1$. Nakon toga, ova druga kuglica centralno udara u treću mirnu kuglicu mase $m_3 = 0,5 m_2$. Kojim se brzinama gibaju kuglice nakon srazova?

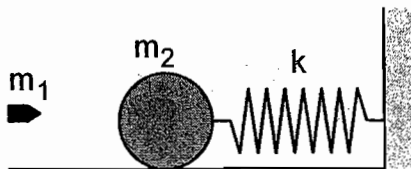
Rješenje: $v_1' = 3 \text{ m/s}$, $v_2' = 12 \text{ m/s}$, $v_2'' = 4 \text{ m/s}$, $v_3' = 16 \text{ m/s}$

18. Plastična loptica pada s visine od 2 m na pod, i odbija se nekoliko puta uzastopce. Koliki je koeficijent restitucije, ako je do drugog sraza loptice s podom prošlo 1,8 sekundi?

Uputa: koeficijent restitucije je omjer brzina neposredno prije i poslije sraza.

Rješenje: $k = 0,91$

19. Na glatkoj horizontalnoj podlozi leži kugla mase $m_2 = 4,5 \text{ kg}$ spojena preko opruge konstante $k = 500 \text{ N/m}$ s čvrstim zidom (vidi sliku). Metak mase $m_1 = 10 \text{ g}$ i brzine $v_1 = 600 \text{ m/s}$ zabije se u kuglu i ostane u njoj. Koliko će se sabiti opruga?



Rješenje: $\Delta x = 0,126 \text{ m}$

20. Sitno tijelo mase 1 kg može se gibati u smjeru x -osi. Pod djelovanjem sile $F = (3 + 4 \cdot x) \text{ N}$ pri čemu je x u jedinicama metar, tijelo prijeđe put od 3 m . Gibanje tijela započelo je iz točke $x = 0$ u trenutku $t = 0$. Izračunajte:
- brzinu koju tijelo ima na kraju puta,
 - ubrzanje što ga tijelo postigne na kraju puta,
 - snagu tijela na kraju puta.

Rješenje: a) $v = 7,35 \text{ m/s}$, b) $a = 15 \text{ m/s}^2$, c) $P = 110,25 \text{ W}$

21. Na horizontalnoj gredi dužoj 12 metara mase 100 kg nalazi se valjak mase 200 kg udaljen 3 m od jednog njenog kraja. Greda je poduprta na krajevima tako da je sila reakcije oslonca okomita na gredu. Kolike su sile reakcije?

Rješenje: $F_A = 1962 \text{ N}$, $F_B = 981 \text{ N}$

22. Homogeni štap je naslonjen na glatki zid i nalazi se na hrapavom podu. Ako štap zatvara kut od 45° s podlogom i masa mu je 10 kg , pronadi silu trenja između štapa i poda.

Rješenje: $F_{tr} = 49,1 \text{ N}$

23. Šuplji valjak tankih stijenki zarotiran je do 10 okretaja u sekundi i postavljen na tlo uz vertikalnu stijenu. Ako je faktor trenja klizanja $\mu = 0,1$, potrebno je odrediti nakon koliko će se vremena valjak zaustaviti? Koliko okretaja valjak napravi, ako mu je polumjer $R = 30 \text{ cm}$?

Rješenje: $t = 17,64 \text{ s}$, $n = 88$

24. Na zamašnjak momenta tromosti $I = 1 \text{ kgm}^2$, koaksijalno je provučen valjčić polumjera 4 cm i mase 200 grama . Na valjčić je namotan konac s utegom od 5 kg obješenim na slobodnom kraju konca.

- Uteg propadne visinu h . Kolika je brzina utega na kraju ovog puta? Početna brzina utega je nula. Masa konca se zanemaruje!
- Izračunajte vrijeme u kojem će uteg propasti visinu $h = 2 \text{ m}$.

Rješenje: a) $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I + I_v}{r^2}}}$, b) $t = 7,17 \text{ s}$

25. Izračunajte jakost gravitacijskog polja i gravitacijski potencijal Zemlje u točki na visini od 1000 km iznad Zemljine površine. Pretpostavite da je Zemlja homogena kugla. Koliko je u toj točki gravitacijsko polje Sunca?

Rješenje: $\gamma_Z = 7,3 \text{ ms}^{-2}$, $\varphi = -5,4 \cdot 10^7 \text{ Jkg}^{-1}$, $\gamma_S = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$

26. Satelit mase 100 kg kruži oko Zemlje na visini od 1000 km. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.

Rješenje: $v = 7,3 \text{ km/s}$, $T = 6,3 \cdot 10^3 \text{ s}$, $E_k = 27 \text{ GJ}$, $E_p = -54 \text{ GJ}$, $E = -27 \text{ GJ}$

27. Kolika centrifugalna sila djeluje na tijelo mase 1 kg na Zemljinoj površini:

- a) na ekvatoru,
- b) na geografskoj širini 45° i
- c) na polu?

Rješenje: a) $F_e = 0,034 \text{ N}$, b) $F_{45^\circ} = 0,024 \text{ N}$, c) $F_p = 0 \text{ N}$

28. Kolikom silom čovjek mase 100 kg djeluje na pod lifta kada se lift:

- a) diže stalnom brzinom,
- b) diže akceleracijom 1 ms^{-2} i
- c) spušta akceleracijom od 1 ms^{-2} ?

Rješenje: a) $F = 981 \text{ N}$, b) $F = 1081 \text{ N}$, c) $F = 881 \text{ N}$

29. Inercijalni sustav S' giba se brzinom $v = 0,6 c$ u odnosu na inercijalni sustav S . U sustavu S' nalazi se štap koji zatvara kut $\theta' = 45^\circ$ sa smjerom gibanja. Koji kut zatvara taj štap sa smjerom gibanja u sustavu S ?

Rješenje: $\theta = 51^\circ 20'$

30. Inercijalni sustavi S_1 i S_2 kreću se u smjeru osi x brzinama $v_1 = 0,8 c$ i $v_2 = 0,6 c$ u odnosu na inercijalni sustav S . Ako na satu koji miruje u sustavu S_1 prođe 1 s, koliko vremena prođe za opažača u sustavu S_2 ?

Rješenje: $\Delta t_2 = 1,084 \text{ s}$

31. Brzina elektrona se u jednolikom električnom polju mijenja od $v_1 = 0,97 c$ do $v_2 = 0,99 c$. Izračunajte potencijal koji ubrzava elektron!.

Uputa: potencijal $V = \frac{\Delta E}{Q}$, Q je naboj čestice.

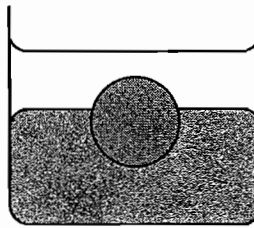
Rješenje: $U = 1,52 \cdot 10^6 \text{ V}$

1.2. MEHANIKA TEKUCINA

32. Ako je tlak na podnožju planine (nadmorska visina 300 m) 101 kPa, koliki je tlak na vrhu planine visoke 1000 m? Pretpostavite da je temperatura svuda jednaka i da iznosi 0°C .

Rješenje: $p = 92,5 \text{ kPa}$

33. U posudi je živa, a iznad nje voda (vidi sliku). Homogena željezna kugla pliva na granici između žive i vode. Koliki je dio volumena kugle u živi, a koliki u vodi?



Rješenje: $V_{\text{živa}} = 0,55 V$, $V_{\text{voda}} = 0,45 V$

34. U moru pliva santa leda tako da joj viri volumen 195 m^3 iznad površine mora. Koliki je ukupni volumen sante ako je gustoća mora $1,03 \text{ g/cm}^3$, a gustoća leda $0,9 \text{ g/cm}^3$?

Rješenje: $V = 1545 \text{ m}^3$

35. Homogenim drvenim štapom duljine $l = 5 \text{ m}$, težine $G = 40 \text{ N}$, gustoće $\rho_1 = 796 \text{ kg/m}^3$ izmjeri se dubina jezera $H = 4,75 \text{ m}$. Koliki je izvršeni rad ako je štap uranjan vertikalno? (Gustoća vode je $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$).

Rješenje: $W = 2,98 \text{ J}$

36. U U-cijev kojoj krakovi imaju različite polumjere ulivena je čista voda. Kolika je razlika nivoa ako su polumjeri $r_1 = 4 \text{ mm}$ i $r_2 = 0,6 \text{ mm}$. Pretpostavite da voda potpuno moči stijenku cijevi.

Rješenje: $\Delta h = 2,1 \text{ cm}$

37. Areometar pliva u vodi što potpuno moči njegove stijenke. Promjer cijevi areometra jest 9 mm . Koliko će se promijeniti dubina uronjenosti Δh areometra ako po površini vode kapnemo nekoliko kapi alkohola? Koeficijent površinske napetosti alkohola jest $0,02 \text{ Nm}^{-1}$, a vode $0,073 \text{ Nm}^{-1}$.

Rješenje: $\Delta h = 2,4 \text{ mm}$

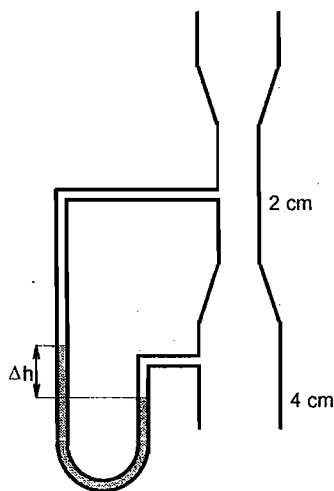
38. Poprečni presjek klipa u vodoravno položenoj štrcaljki jest $1,6 \text{ cm}^2$, a presjek otvora je 1 mm^2 . Za koliko vremena će isteći voda iz štrcaljke, ako na klip djeluje sila od 5 N i ako je hod klipa 4 cm ?

Rješenje: $t = 0,81 \text{ s}$

39. Pitot–Prandtlova cijev je u struji zraka gustoće $1,2 \text{ kg/m}^3$ i brzine v i tlaka p . Kolika je brzina zraka ako je razlika stupaca vode u diferencijalnom manometru spojenom na Pitot–Prandtlovu cijev 6 cm ?

Rješenje: $v = 31 \text{ m/s}$

40. Voda prolazi kroz okomitu Venturijevu cijev koja na ulazu ima promjer 4 cm , a na suženom dijelu, koji je $0,5 \text{ m}$ iznad ulaznog, promjer je 2 cm (vidi sliku). Na ulazu je tlak 160 kPa , a na suženom dijelu je tlak 80 kPa . Izračunajte brzinu protjecanja vode i protok vode kroz cijev. Kolika bi bila razlika stupca žive u živinom manometru u obliku U -cijevi, spojenom između ulaza i suženja cijevi? Zanimajte unutrašnje trenje.



Rješenje: $v_1 = 3,164 \text{ m/s}$, $q = 3,974 \text{ l/s}$, $\Delta h = 0,607 \text{ m}$

41. Kapljice vode u nekom oblaku imaju polumjer od $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Kojom najvećom brzinom mogu te kapljice padati kroz zrak? Za viskoznost zraka uzmite $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$.

Rješenje: $v = 0,3 \text{ m/s}$

2. TITRANJE I VALOVI

42. Tijelo obješeno o spiralnu oprugu uzrokuje produljenje opruge za 4 cm. Koliko titraja napravi ovo tijelo u 1 minuti kada ga se pobudi na vertikalno harmoničko titranje?

Rješenje: $n = 150$

43. Kuglica mase $2 \cdot 10^{-2}$ kg, pričvršćena na oprugu s konstantom elastičnosti 8 Nm^{-1} , harmonički titra s amplitudom A . Na udaljenosti $A/2$ od ravnotežnog položaja postavi se masivna ploča, od koje se kuglica odbija savršeno elastično. Nađite titrajno vrijeme u ovom slučaju.

Rješenje: $T = 0,21 \text{ s}$

44. Matematičko njihalo duljine 60 cm njiše u avionu koji se uspinje pod kutem od 30° prema horizontalnoj ravnini, s ubrzanjem od 4 ms^{-2} . Nađite period njihanja tog matematičkog njihala.

Rješenje: $T = 1,39 \text{ s}$

45. Materijalna točka izvodi istovremeno dva međusobno okomita harmonička gibanja opisana jednadžbama:

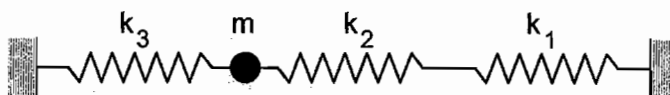
$$x = 1 \cdot \cos(\pi \cdot t) \text{ cm},$$

$$y = 2 \cdot \cos(0,5\pi \cdot t) \text{ cm}.$$

Odredite jednadžbu staze materijalne točke te nacrtajte sliku staze gibanja.

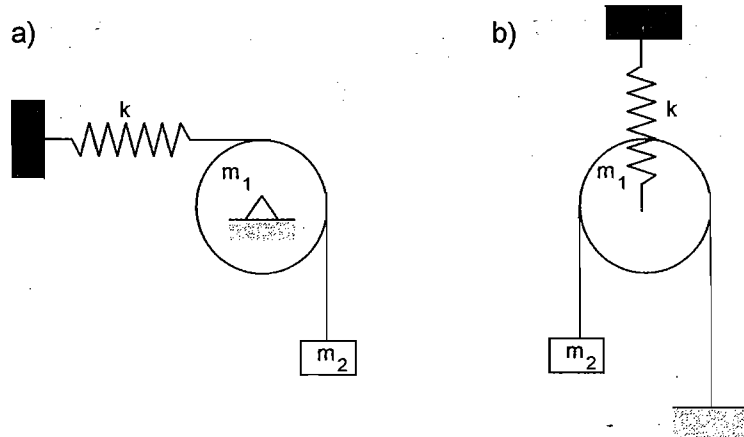
Rješenje: Dio parabole $y^2 = 2x + 2$ unutar pravokutnika sa vrhovima $A(1, 2)$, $B(1, -2)$, $C(-1, -2)$, $D(-1, 2)$.

46. Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnog sustava koji se sastoji od materijalne točke mase m i triju opruga konstanti k_1 , k_2 , k_3 spojenih kao na slici.



$$\text{Rješenje: } \omega = \sqrt{\frac{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

47. Titrajni sustav sastoji se od homogenog diska mase m_1 polumjera R koji se okreće oko horizontalne osi, opruge konstante k i utega mase m_2 kao što prilazuju slike a) i b). Pretpostavivši jednostavno harmoničko titranje, odredite frekvenciju sustava.



Rješenje: a) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m_2 + m_1}}$, b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m_2 + 3m_1}}$

48. Tanki homogeni štap obješen je oko osi kroz jedan kraj. Koliki je odnos titrajnih vremena za štap duljine L i za isti štap duljine $2L$?

Rješenje: $T_L : T_{2L} = 0,707$

49. Puni homogeni disk polumjera R njiše oko horizontalne osi koja je okomita na bazu diska i udaljena je za r od središta baze. Koliki mora biti r da bi titrajno vrijeme mali oscilacija bilo minimalno?

Rješenje: $r = 0,707 \cdot R$

50. Površinom vode se širi transverzalni ravni sinusni val, čija je amplituda 5 mm a valna duljina 2 cm. Kolika je elongacija čestice $s(x, t)$ koja je od ishodišta udaljena 0,5 cm u trenu $t = 0$? Predočite sliku vala i označite na slici elongaciju čestice!

Rješenje: $s(0,5; 0) = -5 \text{ mm}$

3. KINETIČKA TEORIJA TOPLINE I TERMODINAMIKA

51. Pri kojoj je temperaturi srednja brzina gibanja molekula ugljik-dioksida jednaka srednjoj brzini gibanja molekula dušika na 0°C ?

Rješenje: $t = 156^\circ\text{C}$

52. Jednoatomi helij nalazi se na temperaturi od -70°C . Izračunajte srednju efektivnu brzinu $\sqrt{\bar{v}^2}$ i srednju brzinu \bar{v} , ako se radi o atomima ^4He . Koji je međusobni odnos tih brzina?

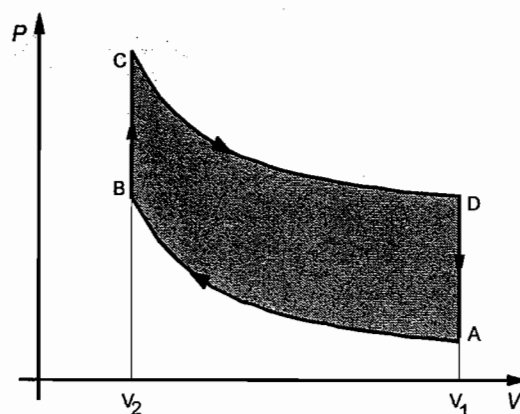
Rješenje: $\sqrt{\bar{v}^2} = 1,125 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $\bar{v} = 1,037 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

53. Pri normalnim uvjetima srednji slobodni put molekula vodika iznosi $l_0 = 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$. Potrebno je odrediti promjer molekula vodika i srednji slobodni put kod temperature $t_0 = 0^\circ\text{C}$ i tlaka $p = 10 \text{ Pa}$.

Rješenje: $D = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $l = 0,13 \text{ cm}$

54. Termodinamički procesi, izgaranjem benzina u motoru s unutrašnjim izgaranjem, prikazani su dijagramom za idealni reverzibilni ciklus. Dio A–B odnosi se na adijabatsku kompresiju izgarajuće smjese, a B–C na izohorno izgaranje pri čemu radni plin prima količinu topline Q . Dio C–D odgovara adijabatskom širenju radnog plina, dok D–A odgovara izohornom ispustu stvorenih plinova.

- Odredite koeficijent iskorištenja ciklusa η , izrazivši ga koeficijentom kompresionog omjera plina $\varepsilon = V_1 / V_2$.
- Izračunajte stupanj korisnog djelovanja motora koji bi radio po ovom ciklusu, za $\varepsilon = 6$, te uzevši da je $\kappa = 1,38$ za smjesu zrka i benzina.



Rješenje: a) $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}$, b) $\eta = 49,4 \%$

55. Kolika je promjena entropije ako se pomiješa $m_1 = 10$ g vode temperature $t_1 = 100$ °C i $m_2 = 20$ g vode temperature $t_2 = 15$ °C?

Rješenje: $\Delta S = 0,94$ J/K

56. Prikažite Carnotov reverzibilni ciklus u sustavu termodinamičkih koordinata temperature (T) i entropije (S) sustava. Pokažite da koeficijent iskorištenja ciklusa zavisi o ekstremnim temperaturama ciklusa T_1 i T_2 , te da iznosi $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

4. ELEKTROMAGNETIZAM

4.1. ELEKTROSTATIKA

57. Izračunajte elektrostatsku silu između 2 protona na razmaku deseterostruko većem od veličine polumjera protona kako se ona uzima u modernoj fizici. Usporedite je s gravitacijskom silom između dva protona na istoj udaljenosti.

Rješenje: $F_{el} = 2,31$ N, $F_G = 1,87 \cdot 10^{-36}$ N

58. Naboj od 1 nC smješten je u točki s koordinatama (2, 3) m.
a) Izračunajte vektor električnog polja i potencijal u točki (-3, 6) m.
b) Odredite iznos sile i potencijalnu energiju elektrona u istoj točki.

Rješenje: a) $\vec{E} = 0,045 \cdot (-5\vec{i} + 3\vec{j})$ V/m, $V(r) = 1,54$ V, b) $F = 4,14 \cdot 10^{-20}$ N, $E = 2,47 \cdot 10^{-19}$ J

59. Dvije kuglice od kojih svaka ima masu $m = 100$ g pričvršćene su na svilene niti duge 2 m i obješene u zajedničkoj točki. Ako se kuglicama dovede naboj $Q = 1$ μC, niti se otklone. Izračunajte:
a) razmak r na koji su se kuglice udaljile jedna od druge,
b) kut α koji svilene niti zatvaraju s vertikalom.

Rješenje: a) $r = 0,21$ m, b) $\alpha = 3^\circ$

60. Dva točkasta naboja $Q_A = 200$ pC i $Q_B = -100$ pC smještena su u točkama A i B koje su međusobno razmaknute za 100 cm. Izračunajte rad W potreban da se naboj od $2 \cdot 10^{-4}$ C pomakne iz točke C u točku D, ako je točka C udaljena od A 80 cm i točka D od A 20 cm. Točke C i D su na spojnici točaka A i B.

Rješenje: $W = 2,026 \cdot 10^{-3}$ J

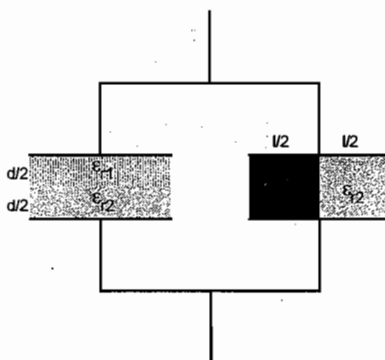
61. Kuglica mase 30 mg nabijena pozitivnim nabojem 10^{-8} C, giba se brzinom od $0,1$ ms⁻¹ u elektrostatskom potencijalu pozitivnog mirnog točkastog naboja. Na koju udaljenost r od točkastog naboja se kuglica može približiti, ako točkasti naboj iznosi 1,3 nC.

Rješenje: $r = 0,78$ m

62. Neka je zadano n jednakih kapljica vode (svaka ima polumjer r i nosi naboj Q). Pretpostavimo li da se kapljice mogu spajati u zajedničku veliku kapljicu bez gubitaka mase, izračunajte kako elektrostatski potencijal tako nastale velike kapljice zavisi od broja manjih kapljica n . Brojčano izrazite potencijal ako je zadano $n = 8$, $Q = 10^{-10}$ C, $r = 1$ mm.

Rješenje: $U = \frac{n \cdot Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot r \cdot \sqrt[3]{n}}$, $U = 3,6$ kV

63. Izračunajte kapacitet baterije kondenzatora C_b spojenih prema slici. Prostor između kvadratnih ploča stranice l ispunjen je slojevima izolatora jednake debljine d i dielektričnih konstanti ϵ_{r1} i ϵ_{r2} . Razmak između ploča je d .

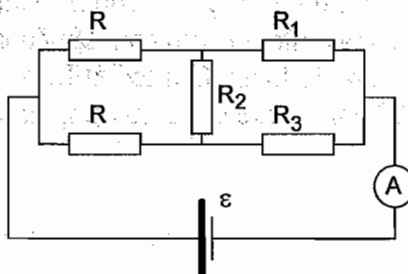


Rješenje: $C_b = \frac{\epsilon_0 l^2}{2d} \cdot \frac{\epsilon_{r1}^2 + \epsilon_{r2}^2 + 6\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}$

4.2 ELEKTRIČNA STRUJA I MAGNETSKO POLJE

64. U električnoj mreži prema slici, svi su otpori jednaki i iznose 1Ω . Unutrašnji otpori ampermetra i izvora su zanemarivi. Napon izvora \mathcal{E} iznosi 10 V. Izračunajte:

- struju kroz ampermetar,
- srednju izlaznu snagu ako su otpornici R_1 , R_2 i R_3 uključeni (DA) ili isključeni (NE) u mreži s vjerojatnošću 50% . Pretpostavite da je promjena (uključivanje/isključivanje) ovih otpornika međusobno nezavisna.



Rješenje: a) $I_A = 10$ A, b) $\bar{P} = 52,5$ W

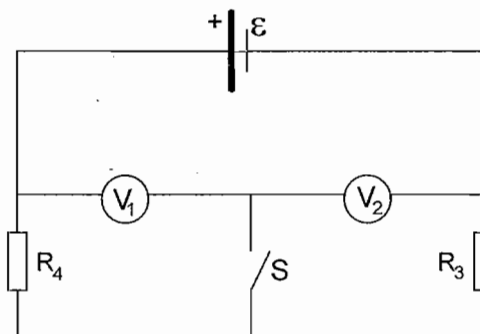
65. Kroz dva vrlo duga i tanka vodiča teku struje $I_A = 20 \text{ A}$ i $I_B = 30 \text{ A}$. Udaljenost između vodiča je 10 cm . Odredite jakost magnetskog polja H u točkama M_1 , M_2 i M_3 , pri čemu je udaljenost između točki M_1 i A iznosi 2 cm , između M_2 i A 4 cm i između M_3 i B 3 cm . Struje teku u suprotnim smjerovima.



Rješenje: $H_1 = 120 \text{ A/m}$, $H_2 = 159 \text{ A/m}$, $H_3 = 135 \text{ A/m}$

66. U strujnome krugu, prema slici, otpori voltmetara V_1 i V_2 su $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$. Elektromotorna sila (napon) izvora iznosi $\mathcal{E} = 150 \text{ V}$, dok su iznosi otpornika $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ i $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$. Koje vrijednosti napona će pokazivati voltmetri V_1 i V_2 :

- a) kad je sklopka S otvorena,
b) ako je sklopka S zatvorena?



Rješenje: a) $V_1 = 90 \text{ V}$, $V_2 = 60 \text{ V}$, b) $V_1 = 75 \text{ V}$, $V_2 = 75 \text{ V}$

67. Usporedite magnetske indukcije u centru kružnog zavoja i kvadratnog okvira, ako njima teče ista struja, a promjer kružnice je jednak stranici kvadrata!

Rješenje: $B_{\text{kruža}} : B_{\text{kvadrata}} = \pi : 2\sqrt{2}$

68. Kvadratični okvir sa stranicom $a = 8 \text{ cm}$, kojim teče struja $I = 50 \text{ A}$, smješten je u magnetsko polje indukcije 1 T , tako da normala na okvir zatvara kut $\alpha = 45^\circ$ sa smjerom vektora magnetske indukcije. Koliki je zakretni moment na okvir?

Rješenje: $M = 0,266 \text{ Nm}$

69. Zavoj od 200 zavoja nalazi se u magnetskom polju indukcije $5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Omski otpor zavojnice je 40Ω , a površina presjeka 12 cm^2 . Aksijalna os zavojnice zatvara sa smjerom polja kut od 60° . Kolika struja će poteći zavojnicom, ako magnetska indukcija u vremenu od jedne sekunde padne na nulu?

Rješenje: $I = 0,15 \text{ mA}$

70. Zavojnica od 100 zavoja jednoliko se vrti u homogenom magnetskom polju indukcije $0,1 \text{ T}$ brzinom od 5 okretaja u sekundi. Presjek zavojnice jest 100 cm^2 . Os vrtnje je okomita na aksijalnu os zavojnice i na smjer magnetskog polja. Nađite maksimalni inducirani napon u zavojnici.

Rješenje: $U_{\text{max}} = 3,14 \text{ V}$

71. Na izvor izmjeničnog napona $\varepsilon = 141 \sin(314 \cdot t)$ spojeni su serijski otpornik, kondenzator i zavojnica. Koliki je pad napona na kondenzatoru ako su $R = 50 \, \Omega$, $C = 100 \, \mu\text{F}$ i $L = 0,008 \, \text{H}$? Koja je impedancija veća, kapacitivna ili induktivna?

Rješenje: $U_C = 54,94 \, \text{V}$, $X_C / X_L = 12,7$

72. U jednoj grani izmjeničnog strujnog kruga serijski su povezani zavojnica induktivnosti L i otpornik $R = 0,2 \, \Omega$. Napon na cijeloj grani (na oba potrošača) iznosi $0,5 \, \text{V}$ a struja kroz granu $0,5 \, \text{A}$. U nekom trenutku struja počinje rasti i ta se promjena može opisati kao $\Delta I / \Delta t = 8 \, \text{A/s}$. Izračunajte koeficijent induktivnosti L ?

Rješenje: $L = 0,05 \, \text{H}$

4.3 ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

73. Električno polje svjetlosnog vala dano je izrazom:

$$E = 0,5 \, \text{Vm}^{-1} \sin\left(\pi \cdot (1,2 \cdot 10^{15} \, \text{s}^{-1} t - 4 \cdot 10^6 \, \text{m}^{-1} x)\right)$$

Odredite amplitudu, frekvenciju, valnu duljinu, period i brzinu.

Rješenje: $E_0 = 0,5 \, \text{V/m}$, $f = 6 \cdot 10^{14} \, \text{Hz}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \, \text{m}$, $T = 1,67 \cdot 10^{-15} \, \text{s}$

74. Magnetska indukcija monokromatskog ravnog vala u vakumu zadana je izrazom

$$\vec{B} = \vec{k} B_0 \sin\left(\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \text{ gdje je } B_0 = 2 \cdot 10^{-9} \, \text{T} \text{ i } \omega = \pi \cdot 10^{15} \, \text{s}^{-1}. \text{ Izračunajte:}$$

- frekvenciju, valnu dužinu i valni broj,
- električno polje,
- srednju gustoću energetskega toka vala.

Rješenje: a) $f = 5 \cdot 10^{14} \, \text{Hz}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \, \text{m}$, $k = 1,05 \cdot 10^7 \, \text{m}^{-1}$, b) $\vec{E} = \vec{j} 0,6 \, \text{Vm}^{-1} \sin\left(\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$, c) $P = 4,8 \cdot 10^{-4} \, \text{Wm}^{-2}$

5. OPTIKA

5.1. GEOMETRIJSKA OPTIKA

75. Kut upada svjetlosti na granicu zrak/staklo je $u = 45,7^\circ$, a kut loma $l = 28,5^\circ$. Kolika je brzina širenja svjetlosti u staklu?

Rješenje: $v = 2 \cdot 10^8$ m/s

76. Zraka svjetlosti upada pod kutem od 30° na planparalelnu staklenu pločicu i izlazi iz pločice paralelno upadnoj zraci. Indeks loma stakla je $n = 1,5$. Kolika je debljina pločice, ako razmak između upadne i izlazne zrake iznosi 1,94 cm?

Rješenje: $d = 10$ cm

77. Gdje je predmet ako konkavno sferno ogledalo polumjera $R = 30$ cm daje tri puta uvećanu realnu sliku predmeta? Koliko je slika udaljena od ogledala?

Rješenje: $a = 20$ cm, $b = 60$ cm

78. Gdje su predmet i slika ako konkavno sferno ogledalo polumjera $R = 30$ cm daje tri puta uvećanu virtualnu sliku predmeta?

Rješenje: $a = 10$ cm, $b = -30$ cm

79. Ispred konkavnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti $r = 40$ cm nalazi se predmet. Gdje treba postaviti predmet da bi slika bila realna, obrnuta i deset puta veća od predmeta?

Rješenje: 22 cm ispred zrcala

80. Predmet se nalazi na udaljenosti $a_1 = \frac{4}{3}f_1$ od konkavnog sfernog zrcala. Reflektirane zrake s tog zrcala upadaju na konveksno zrcalo $f_2 = 2f_1$. Konveksno zrcalo okrenuto je glatkom stranom prema konkavnom. Udaljenost između zrcala je $d = 3f_1$. Odredite položaj konačne slike i povećanje.

Rješenje: $b_2 = 2f_1$, točno u fokusu konkavnog zrcala; $m = -6$

81. Vertikalni predmet visine 5 cm udaljen je 50 cm od tjemena konveksnog zrcala polumjera zakrivljenosti 35 cm. Gdje se formira slika predmeta i kakva je narav slike? Pokažite konstrukcijom, pomoću karakterističnih zraka, kako se formira slika!

Rješenje: $b = -12,96$ cm, slika je virtualna i uspravna

82. Izračunajte polumjer zakrivljenosti udubljenog sfernog zrcala ako ono napravi trostruko manju obrnutu sliku predmeta. Udaljnost između predmeta i slike je 85 cm. Konstruirajte sliku kojom dokazujete dobiveno rješenje!

Rješenje: $r = 63,75$ cm

83. Na dnu bazena ispunjena vodom ($n = \frac{4}{3}$) nalazi se izvor svjetlosti čije se zrake totalno reflektiraju s površine vode te čine graničnu kružnicu polumjera $r = 6$ m na dnu bazena. Kolika je dubina bazena?

Rješenje: $h = 2,64$ m

84. Cilindar od stakla ($n = 1,5$) koji završava sfernom granicom polumjera $r = 4$ cm uronjen je u kapljevину. Svjetli predmet u kapljevinu na optičkoj osi sferne granice udaljen 60 cm od tjemena sferne granice, ima sliku u staklu cilindra udaljenu 100 cm od tjemena. Koliki je indeks loma kapljevine?

Rješenje: $n' = 1,35$

85. Na zastoru koji je 1,2 m daleko od predmeta želi se dobiti dvostruko uvećana slika:

a) pomoću leće,

b) pomoću sfernog ogledala ako je slika realna i uvećana, a predmet je između centra zakrivljenosti i fokusa ogledala.

Odredite žarišne daljine leće i ogledala.

Rješenje: a) $f = 26,7$ cm, b) $f = 80$ cm

86. Bikonkveksna tanka leća polumjera zakrivljenosti $R_1 = 10$ cm i $R_2 = 12$ cm daje u vodi realnu sliku predmeta udaljenog 48 cm od leće na udaljenosti 96 cm od leće. Odredite indeks loma leće ako je indeks loma vode $n = \frac{4}{3}$.

Rješenje: $n' = 1,56$

87. Dvije tanke leće imaju zajedničku optičku os i međusobno su razmaknute za $d = 10$ cm. Obje su leće jednakih žarišnih duljina $f_1 = -f_2 = 25$ cm s tim da je prva konvergentna, a druga divergentna. Na kojoj se udaljenosti od druge leće formira slika beskonačno dalekog predmeta?

Rješenje: $b_2 = 37,5$ cm

5.2. FIZIKALNA OPTIKA

88. Pri ogibu natrijeve svjetlosti ($\lambda = 589 \text{ nm}$) na jednoj pukotini, kutna širina glavnog difrakcijskog maksimuma je 30° . Pod kojim se ogibnim kutem opaža treći minimum?

Rješenje: $\theta = 50,93^\circ$

89. Youngovim je pokusom ustanovljeno slijedeće: kada je na put jednog snopa svjetlosti valne duljine 589 nm stavljena posuda plina duga 15 cm , peta svjetla pruga bit će na mjestu dvadesete svjetle pruge, u usporedbi s onom interferencijskom slikom koja se dobije ako je u posudi zrak indeksa loma $n = 1,00028$. Odredite indeks loma plina.

Rješenje: $n' = 1,00034$

90. Kod Newtonovih kolobara n -ti svjetli kolobar ima promjer $0,57 \text{ cm}$ a $(n + 20)$ -ti promjer $1,33 \text{ cm}$. Valna duljina svjetlosti je 589 nm . Koliki je polumjer zakrivljenosti leće? Koji je redni broj ovih kolobara?

Rješenje: $R = 306 \text{ cm}$, $n = 5$

91. Svjetlost električnog izboja plinom ispunjene cijevi upada okomito na optičku rešetku. Kolika je konstanta rešetke ako se maksimumi za dvije valne duljine, $656,3 \text{ nm}$ i $410,2 \text{ nm}$ vide pod kutom $\theta = 40^\circ$?

Rješenje: $d = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

92. Prirodna svjetlost prolazi kroz sustav od n identičnih polarizatora koji su postavljeni jedan iza drugoga tako da je kut između glavnih ravnina dvaju susjednih polarizatora 45° . Koeficijent transmisije svakog polarizatora je $0,8$ kada na njega pada linearno polarizirano svjetlo. Koliko polarizatora treba upotrebiti da bi se prolazom kroz taj sustav intenzitet svjetla smanjio sto puta?

Rješenje: $n = 5$

93. Odredite koeficijent refleksije svjetlosti koja upada na površinu stakla ($n = 1,54$) pod kutom kod kojega dolazi do totalne polarizacije svjetlosti.

Rješenje: $k_r = 0,083$

94. Indeksi loma dvolomca za natrijevu svjetlost ($\lambda = 589 \text{ nm}$) iznose za redovnu zraku $n_1 = 1,73$ i za izvanrednu zraku $n_2 = 1,53$. Kolika je optička razlika puta i pomak u fazi, kada te dvije zrake izlaze iz pločice dvolomca čija je debljina $4,42 \mu\text{m}$?

Rješenje: $\delta = 0,884 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $\Delta\Phi = 3\pi$

6. GRAĐA TVARI (ATOM, JEZGRA I ELEMENTARNE ČESTICE)

95. Najveća valna duljina koja uzrokuje fotoelektrični efekt na natriju iznosi 545 nm. Izračunajte zaustavni potencijal potreban za zaustavljanje fotoelektrona iz natrija obasjanog zračenjem valne duljine 200 nm.

Rješenje: $U_Z = 3,927 \text{ V}$

96. Površinu metalne ploče obasjamo svjetlošću valne duljine $0,35 \mu\text{m}$, a zatim svjetlošću valne duljine $0,54 \mu\text{m}$. Mjerenjem je ustanovljeno da je najveća brzina izbijenih elektrona dva puta veća u prvom nego u drugom slučaju. Koliki je izlazni metal od kojeg je pločica napravljena?

Rješenje: $W_i = 1,88 \text{ eV}$

97. Izračunajte omjer spektralne gustoće zračenja Sunca za $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ i $\lambda_2 = 2000 \text{ nm}$. Pretpostavite da Sunce zrači kao crno tijelo ($T_{\text{fotosfere}} = 6000 \text{ K}$).

Rješenje: $f(\lambda_1, T) : f(\lambda_2, T) = 19,7$

98. U van de Graaffovu elektrostatskom akceleratoru ubrzavaju se jezgre litija naponom $5 \cdot 10^6 \text{ V}$. Kolika je valna duljina λ litijevih jezgri (čestica) ako je njihova relativna masa 6,941 u, pri čemu je $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$?

Rješenje: $\lambda_{\text{Li}} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

99. U Comptonovom raspršenju fotona na elektronu u mirovanju, energija upadnog fotona se jednako razdjeli na raspršeni foton i na elektron odbijen u raspršenju. Kolika je energija raspršenog fotona ako je kut raspršenja fotona $\pi/2$?

Rješenje: $E' = 0,2555 \text{ MeV} = 4,093 \cdot 10^{-14} \text{ J}$

100. Kolika je de Broglieva valna duljina vodikovog atoma koji se na temperaturi 20°C giba najvjerojatnijom brzinom?

Rješenje: $\lambda = 0,18 \text{ nm}$

101. Koji izotop će nastati iz početnog nuklida ${}^{238}_{92}\text{U}$ nakon tri α – raspada i dva β^- – raspada? Napišite shematski pregledno reakcije raspada, vodeći računa o rednom broju Z i masenome broju A nuklida!

Rješenje: ${}^{226}_{88}\text{Ra}$

102. U nekom prehrambenom proizvodu nalazi se i radioaktivna primjesa čija je konstanta raspada $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$. Proizvod se može korisno upotrijebiti tek kad se koncentracija atoma primjese smanji na 25 % od početnog broja radioaktivnih atoma. Izračunajte nakon koliko vremena se proizvod smije koristiti!

Rješenje: $t = 962,70 \text{ h} = 40,11 \text{ dana}$

103. Radioaktivni element što se tijekom rada nuklearne elektrane nakuplja u gorivom elementu jest tehnicij ($^{99}_{43}\text{Tc}$), čije vrijeme poluraspada iznosi $2,13 \cdot 10^5$ godina. Koliko će njegovih atoma još preostati u nekom odloženom elementu (otpadu) nakon 10 000 godina, ako ih je u trenu odlaganja, na primjer, bilo $3,7 \cdot 10^3$?

Rješenje: $N = 3,581 \cdot 10^3$ atoma

104. Dok organizam (biljka, životinja, čovjek) živi, aktivnost radioaktivnog izotopa ugljika $^{14}_6\text{C}$ u njemu je stalna, ako 250 Bq po kilogramu. Smrću, organizam ne uzima više radiougljik iz Prirode, pa se količina $^{14}_6\text{C}$ vremenom smanjuje zbog radioaktivnog raspada. Izračunajte starost drveta čija je sadašnja aktivnost 200 Bq/kg. Vrijeme poluraspada $^{14}_6\text{C}$ jest 5730 godina.

Rješenje: $t = 1845$ godina

105. Solarni neutrino može nastati u proton – proton međudjelovanju. Koja je nedostajuća čestica u pp – reakciji: $p + p \Rightarrow {}^2\text{H} + ? + \nu$?

Rješenje: pozitron, e^+

106. Atomi vodika, koji se nalaze u osnovnom energetsom stanju, pobuđuju se ultraljubičastim zračenjem, zbog čega emitiraju šest spektralnih linija. Izračunajte valnu duljinu ultraljubičastog zračenja u jedinicama Rydbergove konstante R_H i u nanometrima.

(Uputa: Primijenite jednostavni Bohrov model atoma vodika.)

Rješenje: $\lambda = 16/15$, $R_H = 97,2 \text{ nm}$

107. Pretpostavimo da foton energije 2,55 eV pogađa atom vodika koji se nalazi u prvom pobuđenom stanju. Koji je glavni kvantni broj višega pobuđenog stanja u koji prelazi atom vodika, ako se foton apsorbirao u atomu?

(Uputa: Primijenite jednostavni Bohrov model atoma vodika.)

Rješenje: $n = 4$

108. Kolika je aktivnost 1 g uzorka $^{226}_{88}\text{Ra}$, čije vrijeme poluraspada $T_{1/2}$ iznosi 1600 godina?

Rješenje: $A = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

109. Kolika je masa urana $^{235}_{92}\text{U}$ koji se raspao fisijom, ako je fisijom te mase oslobođena energija $3,24 \cdot 10^{16} \text{ J}$?

Rješenje: $m = 395 \text{ kg}$

110. Kolika je maksimalna energija elektrona emitiranog u β^- – raspadu tricija ${}^3_1\text{H}$?

Masa jezgre tricija ${}^3_1\text{H}$ jest 3,016050 u dok masa jezgre helija ${}^3_2\text{He}$ iznosi 3,016030 u.

(Uputa: $1\text{ u} = 1,660\,540 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ odnosno $1\text{ u} = 931,494\text{ MeV}/c^2$.)

Rješenje: $E_{\beta^-} = 18,6\text{ keV}$

Primjer kontrolne zadaće

Prehrambeno-biotehnološki fakultet

FIZIKA

Prva kontrolna zadaća

Ime i prezime: _____

Matični broj: _____

1. Iz pištolja je u horizontalnome smjeru ispaljen metak početnom brzinom $v_0 = 100 \text{ m/s}$ na visini 1,50 m od horizontalne podloge.

a) Izračunajte domet leta D metka.

b) Koliki su iznos i smjer konačne brzine metka u točki D ?

Rj. a) $D = 55,30 \text{ m}$

Rj. b) $v_D = 100,15 \text{ m/s}, \alpha = 3,13^\circ$

(Zadatak donosi 20 bodova)

2. Dvije fotografske pločice, svaka površine 100 cm^2 , priljubljene su tankim vodenim slojem debljine 5 stotinki milimetara. Močenje je potpuno! Koliku silu treba primijeniti za razdvajanje pločica jedne od druge, a bez njihova pomicanja? Koeficijent površinske napetosti vode jest $0,073 \text{ N/m}$.

Rj. $F = 29,2 \text{ N}$

(Zadatak donosi 10 bodova)

3. Izračunajte brzinu mezonske čestice kojoj je ukupna energija deset puta veća od vlastite energije mirovanja.

Rj. $v = 2,985 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

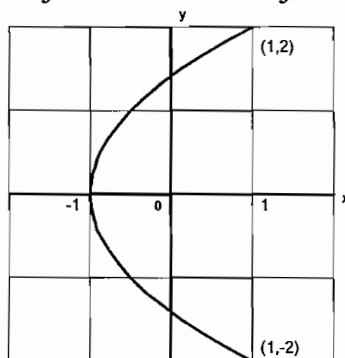
(Zadatak donosi 10 bodova)

4. Materijalna točka izvodi istovremeno dva međusobno okomita harmonička gibanja (titranja) opisana jednačbama:

$$x = 1 \cdot \cos(\pi t) \text{ cm}$$

$$y = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ cm}$$

Odredite jednačbu staze materijalne točke! Nacrtajte sliku staze gibanja!



Koordinatni sustav za sliku.

Rj. $y^2 = 2x + 2$ (parabola)

(Zadatak donosi 10 bodova)

Primjer kontrolne zadaće

Prehrambeno-biotehnološki fakultet

FIZIKA

Druga kontrolna zadaća

Ime i prezime: _____

Matični broj: _____

1. Dva vodiča kapaciteta $C_1 = 50 \mu\text{F}$ i $C_2 = 30 \mu\text{F}$ imaju naboj od $q_1 = 10^{-3} \text{ As}$ i $q_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ As}$. Kolike naboje q_1' i q_2' vodiči imaju nakon njihovog dodira?

Rj. $q_1' = 2,5 \text{ mC}$, $q_2' = 1,5 \text{ mC}$

(Zadatak donosi 10 bodova)

2. Koliki mora biti upadni kut zrake svjetlosti na graničnu površinu zrak – staklo, da bi kut između upadne i lomljene zrake bio 150° . Indeks loma stakla jest 1,50.

Rj. $\bar{u} = 68,3^\circ$

(Zadatak donosi 10 bodova)

3. Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku. Maksimum spektra 3. reda vidi se pod kutom $41^\circ 20'$. Izračunajte:

a) konstantu rešetke u jedinicama valne duljine upadajuće svjetlosti,

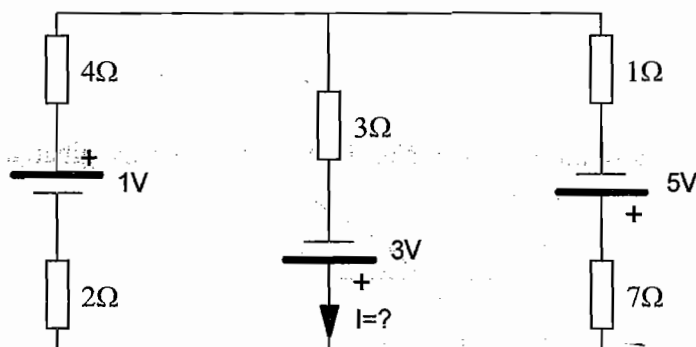
b) ako je valna duljina 600 nm, koliki je broj zareza po mm duljine rešetke.

Rj. a) $d = 4,543 \lambda$

Rj. b) $d^{-1} = 367 \text{ mm}^{-1}$

(Zadatak donosi 20 bodova)

4. Izračunajte struju I u električnoj mreži, prema slici, metodom konturnih struja!



Rj. $I = 2/9 \text{ A} = 0,222 \text{ A}$

(Zadatak donosi 10 bodova)

Primjer kontrolne zadaće

Prehrambeno-biotehnološki fakultet

FIZIKA

Prva kontrolna zadaća

Ime i prezime: _____

Matični broj: _____

1. Tanki homogeni štap duljine L obješen je oko osi kroz jedan njegov kraj.
a) Koliki je odnos titrajnih vremena za štap duljine L i za isti štap duljine $3L$?
b) Izračunajte periode titranja T_L i T_{3L} , ako je duljina $L = 1$ m.

$$\text{Rj. a)} \quad \frac{T_L}{T_{3L}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

$$\text{Rj. b)} \quad T_L = 1,637 \text{ s} \quad T_{3L} = 2,836 \text{ s}$$

(Zadatak donosi 20 bodova)

2. Dvojica biciklista, otac i sin, vozeći paralelno dolaze na netom otvoreno pravokutno križanje. Sin je nastavio u istome smjeru, prema školi, jednolikom brzinom od 10 km/h, a otac je morao skrenuti desno, u smjeru PBF-a gdje radi. U času skretanja brzina mu je iznosila 5 km/h, pa se odmah počeo ubrzavati akceleracijom 1 m/s^2 .

Izračunajte relativnu brzinu sina prema ocu, $\vec{v}_r = \vec{v}_s - \vec{v}_o$, 10 sekundi nakon razdvajanja na križanju.

$$\text{Rj. } |\vec{v}_s - \vec{v}_o| = 11,724 \text{ m/s} = 42,21 \text{ km/h}$$

(Zadatak donosi 10 bodova)

3. Kapilara polumjera $r = 0,15$ mm postavljena je okomito u posudu s vodom. Izračunajte koliki tlak zraka treba biti iznad vode u kapilari da bi razina vode u kapilari i u posudi bila jednaka?

Vanjski tlak jest $p_0 = 760$ mm Hg, močenje je potpuno, $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 0,073$ N/m.

$$\text{Rj. } p = 102,298 \text{ kPa} \quad (p = 767,3 \text{ mm Hg})$$

(Zadatak donosi 10 bodova)

4. U velikoj posudi ispunjenoj ricinusovim uljem pada čelična kuglica stalnom brzinom 0,2 cm/s. Promjer kuglice jest 1,5 mm. Odredite koeficijent viskoznosti ulja! Koliki je *Reynoldsov* broj za ovaj slučaj?

Gustoća ulja jest $\rho_u = 900 \text{ kg/m}^3$ a gustoća čelika $\rho_{\text{č}} = 7700 \text{ kgm}^{-3}$.

(U relaciji za Re uzmite da je karakteristična dimenzija tijela $\ell = 2r$.)

$$\text{Rj. } \eta = 4,17 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad Re = 0,00065$$

(Zadatak donosi 10 bodova)

Primjer kontrolne zadaće

Prehrambeno-biotehnološki fakultet

FIZIKA

Druga kontrolna zadaća

Ime i prezime: _____

Matični broj: _____

1. Deset jednako nabijenih malih kapljica vode mogu se spojiti u zajedničku veliku kapljicu bez gubitka mase. Potencijal tako nastale velike kapljice prema Zemlji iznosi 4 kV. Polumjer svake male kapljice jest 1 mm, a naboj što ga svaka mala kapljica nosi jest Q . Koliki je ukupni naboj velike kapljice?

Rj. $Q_V = n \cdot Q = 9,58 \cdot 10^{-10} \text{ C}$

(Zadatak donosi 10 bodova)

2. U ogibu žute natrijeve svjetlosti na jednoj pukotini (Fraunhoferov ogib), izmjerena je kutna šrina glavnog difrakcijskog maksimuma od 20° . Koliki je ogibni kut pod kojim se vidi 2. minimum?

Rj. $\theta_2 = 20,32^\circ$

(Zadatak donosi 10 bodova)

3. Na zastoru koji je 1 m daleko od predmeta želi se dobiti dvostruko uvećana slika:

a) pomoću leće,

b) pomoću sfernog ogledala (slika je realna i uvećana, a predmet između središta zakrivljenosti i fokusa).

Izračunajte žarišne daljine leće (a) i ogledala (b). Konstruirajte sliku za oba slučaja!

Rj. a) $f_L = 22,2 \text{ cm}$

Rj. b) $f_z = 66,6 \text{ cm}$

(Zadatak donosi 20 bodova)

4. Izračunajte aktivnost 2 grama uzorka $^{226}_{88}\text{Ra}$, čije vrijeme poluraspada $T_{1/2}$ iznosi 1600 godina?

Rj. $A = 7,32 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

(Zadatak donosi 10 bodova)

FIZIKA

za Prehrambeno-biotehnološki fakultet

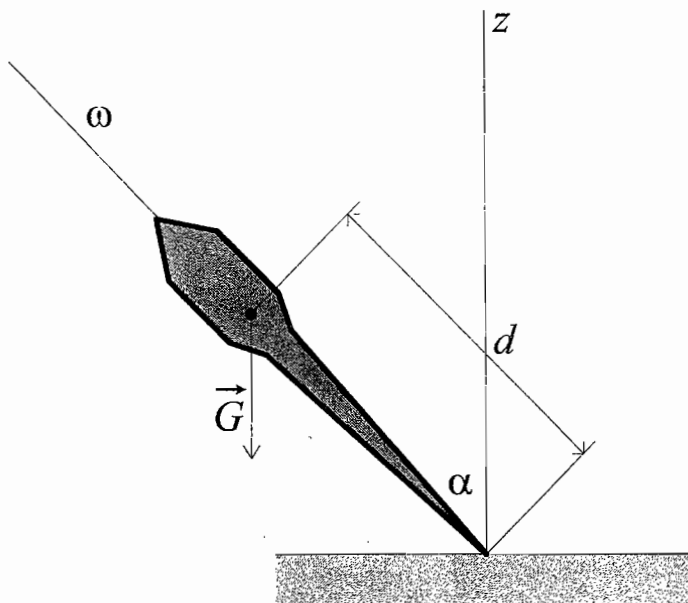
ZADATAK za kućnu obradbu
(Točno rješenje donosi 10 bodova)

Prezime i ime: _____

Matični broj: _____

1. Zvrk na horizontalnoj podlozi rotira kutnom brzinom ω tako da mu je glavna os simetrije nagnuta za kut α prema okomici na horizontalnu podlogu. Težište zvrka je na glavnoj-osi simetrije na udaljenosti d od šiljka na kojemu se okreće zvrk. Težina zvrka je G , a moment tromosti zvrka s obzirom na os vrtnje jest I . Izračunajte:

- kutnu brzinu precesije zvrka,
- iznos kutne brzine precesije ako je: $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 15^\circ$, $G = 2 \text{ N}$, $I = 0,01 \text{ kgm}^2$, $d = 15 \text{ cm}$.



$$\text{Rj. a)} \quad \omega_{pr} = \frac{G \cdot d}{I_0 \cdot \omega}$$

$$\text{Rj. b)} \quad \omega_{pr} = 3 \text{ s}^{-1}$$

Primjer pismenog ispita

Pismeni ispit iz FIZIKE
za Prehrambeno-biotehnološki fakultet

Prezime i ime:

Matični broj:

1. Eksplozijom granate od 9 kg nastanu tri jednaka fragmenta, od kojih je jedan odletio u smjeru juga a drugi u smjeru zapada. Brzina jednog i drugog dijela bila je jednaka i iznosila 30 m/s. Izračunajte energiju koje je oslobođena eksplozijom!

Rj. $E = 5400 \text{ J} = 5,4 \text{ kJ}$

2. Kišna kapljica polumjera polovice milimetra pada kroz zrak čiji je koeficijent viskoznosti $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$. Izračunajte brzinu kapljice! S koje visine bi kapljica trebala pasti da bi slobodnim padom dobila istu brzinu?

Rj. $v_{\text{Stokes}} = 30,28 \text{ m/s}$, $h_{\text{sl.pad}} = 46,73 \text{ m}$

3. Površinom vode se širi transversalni ravni sinusni val, čija je amplituda 5 mm a valna duljina 2 cm. Kolika je elongacija čestice $s(x, t)$ koja je od ishodišta udaljena 0,5 cm u trenu $t = 0$. Predočite sliku vala i označite na slici elongaciju čestice!

Rj. $s(0,5; 0) = -5 \text{ mm}$

4. U izmjeničnome strujnom krugu, spojenom na gradsku mrežu, nalaze se serijski povezani otpornik $R = 100 \Omega$, kondenzator $C = 2 \mu\text{F}$ i zavojnica $L = 500 \text{ mH}$. Izračunajte $\cos(\varphi)$ faktor u strujnome krugu!

Rj. $\cos(\varphi) = 0,07$

5. Manekenka visoka 180 cm želi se gledati u ravnom zrcalu. Kolika je najmanja vertikalna duljina zrcala i na koju visinu od poda valja objesiti zrcalo, da bi se ona u njemu vidjela čitava.

Računajte s visinom očiju na udaljenosti 170 cm od poda!

Rj. $d = 90 \text{ cm}$, $h = 175 \text{ cm}$

6. Foton energije 30 eV, pogodivši atom vodika u osnovnome stanju, izbio je elektron iz njegovog osnovnog stanja. Kolika je brzina izbijenog elektrona na velikoj udaljenosti od atoma? Obrazložite zašto u računu nije bilo potrebno primijeniti relativističke relacije?

Rj. $v = 2,404 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, $\beta = \frac{v}{c} = 0,008$

Studenti koji polažu *Tehničku fiziku* prema starom nastavnom planu, ne rješavaju zadatak broj 6.

Literatura:

- [1] Tomislav Petković, **Predavanja iz fizike za PBF – studij**, *Skripta*, FER, Zavod za primijenjenu fiziku, Zagreb, 1999.
- [2] P. Kulišić, L. Bistričić, D. Horvat, Z. Narančić, T. Petković, D. Pevec, **Riješeni zadaci iz mehanike i topline**, *Školska knjiga*, VI. promijenjeno izdanje, Zagreb, 1996.
- [3] V. H. Bartolić, M. Baće, L. Bistričić, D. Horvat, P. Kulišić, Z. Narančić, T. Petković, D. Pevec, **Riješeni zadaci iz valova i optike**, *Školska knjiga*, Zagreb, 1992.
- [4] V. S. Wolkenstein, **Problems in general physics**, *Mir Publishers*, Moscow, Second edition 1980, Third printing 1990.

KOMPENDIJ FIZIKE ZA PBF U FORMULAMA

KINEMATIKA SITNOG TIJELA

Gibanje po pravcu

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}, \quad s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad v = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

Jednoliko gibanje

$$\vec{s} = \vec{v} \cdot t + \vec{s}_0$$

Jednoliko ubrzano gibanje

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{s}_0, \quad v^2 = 2as + v_0^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Gibanje po kružnici

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad \vec{a}_r = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Jednoliko gibanje po kružnici

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Jednoliko ubrzano gibanje

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0, \quad \omega^2 = 2\alpha\varphi + \omega_0^2$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

Kosi hitac

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$x = v_{0x} t, \quad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad t_H = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

DINAMIKA ČESTICE

Newtonovi zakoni gibanja

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad \vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (m = \text{konst.}) \quad \vec{G} = m \cdot \vec{g}$$

$$F_{TR} = \mu N, \quad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Centar mase

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \vec{r}_{CM} = \int \frac{\vec{r} dm}{m}$$

Centripetalna sila

$$\vec{F}_{CP} = -m\omega^2 \vec{r}, \quad |\vec{F}_{CP}| = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

RAD I ENERGIJA, SUDARI

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad \bar{P} = \frac{W}{t}, \quad P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_p = mgh, \quad E_p = \frac{1}{2} ks^2, \quad \eta = \frac{W_D}{W_U}$$

Elastični sraz

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Neelastični sraz

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}', \quad \vec{v}' = \frac{m_2 \vec{v}_2 + m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}_1' - \vec{v}_2'), \quad q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$\text{Koeficijent restitucije: } k = \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_2'}{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}$$

VRTNJA KRUTOG TIJELA

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad I = \int r^2 dm, \quad I = I_{CM} + m \cdot d^2$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Vrtanja oko glavnih osi inercije

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}, \quad \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (I = \text{konst.})$$

Snaga i energija pri vrtnji

$$W = \int_0^{\varphi} M d\varphi \quad W = M \cdot \varphi \quad (M = \text{konst.})$$

$$P = M\omega \quad E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \cdot \omega^2$$

Tijelo	I	Položaj osi
tanki prsten	$m \cdot r^2$	\perp na ravninu prstena
okrugla ploča	$(m \cdot r^2)/2$	\perp na ravninu ploče
puni valjak	$(m \cdot r^2)/2$	uzdužna os valjka
tanki šuplji valjak	$m \cdot r^2$	uzdužna os valjka
šuplji valjak	$m \cdot (r_1^2 + r_2^2)/2$	uzdužna os valjka
kugla	$(2m \cdot r^2)/5$	kroz središte kugle
tanka šuplja kugla	$(2m \cdot r^2)/3$	kroz središte kugle
tanki štap duljine l	$(m \cdot l^2)/12$	\perp na središte štapa

INERCIJSKI I NEINERCIJSKI SUSTAVI

Galilejeve transformacije

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' & y &= y' & z &= z' & t &= t' \\ v &= v'_x + v_0 & v_y &= v'_y & v_z &= v'_z & a &= a' \end{aligned}$$

Inercijalne sile

$$\begin{aligned} m \cdot \vec{a}' &= \vec{F} + \vec{F}_i & \vec{F}_i &= -m \cdot \vec{a}_0 \\ \vec{F}_{\text{CF}} &= m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}' & \vec{F}_{\text{COR}} &= 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad \vec{\gamma} = -G \frac{m}{r^2} \vec{r}_0$$

$$E = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \quad \phi = -G \frac{m}{r}$$

RELATIVISTIČKA MEHANIKA

Lorentzove transformacije

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} & y &= y' & z &= z' & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ l &= l_0 \sqrt{1 - \beta^2} & \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} & \beta &= \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Slaganje brzina

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x}$$

Energija

$$\begin{aligned} p &= \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} & E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ E_k &= E - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) & \vec{v} &= \frac{c^2}{E} \vec{p} \\ E &= c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} & pc &= \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \end{aligned}$$

STATIKA TEKUĆINA

$$p = \frac{dF}{dS} \quad p = p_0 + \rho gh \quad F_u = \rho g V$$

Barometarska formula

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}, \quad T = \text{konst.}, \quad p_0 = 101325 \text{ Pa},$$

$$\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = -6,5 \frac{\text{K}}{\text{km}} \quad p = p_0 \left(1 - \frac{0,0065 \cdot h / \text{m}}{288} \right)^{5,255}$$

$$\text{Površinska napetost: } \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

DINAMIKA (STRUJANJE) TEKUĆINA

$$Q = Sv = \text{konst.} \quad p + \rho gh + \frac{\rho \cdot v^2}{2} = \text{konst.}$$

$$F_{\text{TR}} = \eta \cdot S \cdot \frac{dv'}{dz} \quad \text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

Poiseuilleov zakon:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} R^4$$

$$F_{\text{TR}} = 8\pi\eta l \bar{v}$$

$$\text{Stokesov zakon: } F_{\text{TR}} = 6\pi\eta R v$$

$$\text{Turbulentno strujanje: } F_{\text{OT}} = \frac{1}{2} C_0 S \rho v^2$$

TOPLINA I TEMPERATURA

Rastezanje čvrstih tijela

$$\begin{aligned} l_t &= l_0 (1 + \alpha \Delta T) & \alpha &= \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t} = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta T} \\ V_t &= V_0 (1 + \gamma \Delta T) & \gamma &= \frac{V - V_0}{V_0 \cdot t} = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta T} = 3\alpha \end{aligned}$$

Jednadžba stanja idealnog plina

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$pV = \text{konst.} \quad T = \text{konst.}$$

$$V = V_0 \frac{T}{T_0} \quad p = \text{konst.}$$

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \quad V = \text{konst.}$$

Širenje topline

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} St \quad R = \frac{\Delta T}{\Phi} \quad R = \frac{\Delta x}{\lambda S}$$

$$q = h_c(T_p - T_f)$$

TERMODINAMIKA

Prvi zakon termodinamike

$$\delta Q = dU + \delta W \quad U = n \frac{i}{2} RT$$

Molarni toplinski kapaciteti

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{V=\text{konst.}} \quad C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{p=\text{konst.}}$$

$$C_p - C_V = R \quad \kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

Specifični toplinski kapaciteti

$$c_p = \frac{C_p}{M} \quad c_v = \frac{C_V}{M}$$

$$\text{Rad plina: } W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Poissonove jednadžbe ($\delta Q = 0$)

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa, \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Rad plina pri adijabatskoj promjeni

$$W = \frac{nR}{\kappa-1} (T_1 - T_2) = \frac{nRT_1}{\kappa-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{pV}{\kappa-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$T = \text{konst.: } W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Toplinski (Carnotov) stroj

$$W = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2| = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)$$

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1} \quad \varepsilon = \frac{Q_2}{W},$$

Entropija

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

KINETIČKO-MOLEKULARNA TEORIJA TOPLINE

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \overline{mv^2} = \frac{1}{3} \rho \cdot v_{\text{ef}}^2$$

$$v_{\text{ef}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad pV = NkT$$

$$E_k = \frac{3}{2} kT \quad U = \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} nRT$$

Maxwellova razdioba

$$N_v = \frac{dN}{dv} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot M}}$$

Maxwell-Boltzmannova razdioba

$$N_E = \frac{dN}{dE} = \frac{2N}{\sqrt{\pi} \cdot k^3 T^3} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

$$E_{\text{max}} = \frac{kT}{2} \quad \bar{E} = \frac{3}{2} kT$$

Molarni toplinski kapaciteti

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad C_p = \frac{i+2}{2} R$$

Van der Waalsova jednadžba

$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

$$a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \quad b = \frac{RT_c}{8p_c}$$

$$\text{Frekvencija sudara molekule u plinu: } z = \frac{4}{3} n d^2 v$$

TITRANJE

Elastičnost materijala

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta x}{x} \quad M = D \vartheta \quad D = \frac{\pi r^4}{2 l} G$$

Harmonički oscilator

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + ks = 0 \quad s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

Matematičko njihalo

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \vartheta \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Fizičko njihalo

$$I \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + mgL\vartheta = 0, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}, \quad l_r = \frac{I}{mL}$$

Prigušeno titranje

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

$$s(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \lambda = \delta \cdot T$$

Prisilno titranje

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = A_0 \sin \omega t, \quad A_0 = \frac{F}{m}$$

$$s(t) = A(\omega) \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Frekvencija udara

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$$

MEHANIČKI VALOVI

$$v = \lambda f, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

$$s = A \sin(\omega \cdot t - kx), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \bar{P} = \frac{A^2}{2} k \omega F$$

Transverzalni stojni valovi na užetu

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad s_n = 2A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

Rub:

$$\text{čvrst-čvrst:} \quad \lambda_n = 2L/n$$

$$\text{čvrst-slobodan:} \quad \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

$$\text{slobodan-slobodan:} \quad \lambda_n = 2L/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Longitudinalni valovi

$$\text{u čvrstom tijelu:} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\text{u kapljevini:} \quad v = \sqrt{\frac{1}{K\rho}}$$

$$\text{u plinovima:} \quad v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Zvuk. Dopplerova pojava

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 20 \cdot \log \left(\frac{\Delta P_{\max}}{(\Delta P_{\max})_0} \right), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$$

$$f_p = f_i \frac{v - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_p}{v - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_i}$$

ELEKTRICITET, ELEKTRIČNE STRUJE

Coulombov zakon

$$1. \text{ Sila između dva točkasta naboja: } \vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21},$$

$$\text{gdje je } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad \vec{r}_{21} \text{ jedinični}$$

vektor usmjeren od naboja 1 prema naboju 2, a \vec{F}_2 sila koja djeluje na naboj 2. Električni naboji q_1 i q_2 su skalarne veličine s predznakom i jedinicom naboja.

2. Ukupna sila n točkastih naboja koji djeluju na naboj q_n kojem poznajemo položaj (koordinate x , y i z):

$$\vec{F}_0 = kq_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i} = kq_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i), \text{ gdje je}$$

\vec{r}_{0i} vektor od i -tog naboja sustava do točke (x, y, z) , a \hat{r}_{0i} pripadni jedinični vektor. ($\vec{r}_{0i} \cdot \vec{r}_{0i} = r_{0i}^2$).

Jakost električnog polja

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

Jakost električnog polja na udaljenosti r od naboja Q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0. \text{ Izraz vrijedi i za polje nabijene kugle}$$

polumjera R , u području $r \geq R$. Dielektrična konstanta iznosi $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, gdje je ϵ_r relativna dielektrična konstanta.

Električno polje sustava naboja:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i}{r_{0i}^2} \hat{r}_{0i}, \text{ gdje je } \vec{r}_{0i} \text{ vektor od } i\text{-tog naboja}$$

sustava do točke (x, y, z) , a \hat{r}_{0i} pripadni jedinični vektor.

Polje vrlo dugog ravnog vodiča:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \vec{r}_0, \quad \lambda - \text{linijska gustoća naboja; } \vec{r}_0 - \text{jedinični vektor}$$

Polje ravnomjerno nabijene beskonačne ravnine:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{x}_0; \quad \sigma - \text{plošna gustoća naboja na ravnini,}$$

\vec{x}_0 – jedinični vektor okomit na ravninu. Izraz vrijedi i za slučaj ravnomjerno raspoređenog naboja po zamišljenoj ravnini, koji stvara električno polje s obje strane.

Polje ravnomjerno nabijene beskonačne metalne ploče:

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{x}_0$; σ – plošna gustoća naboja na jednoj strani ploče, \vec{x}_0 – jedinični vektor okomit na nabijenu ploču i okrenut prema dielektriku. Izraz vrijedi i za polje u neposrednoj blizini metalne elektrode proizvoljnog oblika, ali tada za σ , koja se sada mijenja po elektrodi, treba uzeti vrijednost na mjestu elektrode tik uz promatranu točku u dielektriku.

Polje između dviju ravnomjerno i suprotno nabijenih paralelnih ravnina:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{x}_0$$

Proporcionalnost između vektora električnog pomaka i jakosti električnog polja: $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$.

Električni dipolni moment: $\vec{p} = \vec{d} \cdot Q$

Moment para sila na dipol u homogenom električnom polju: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

Potencijalna energija dipola: $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Gaussov zakon

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\sum_i q_i \right)_S, \text{ odnosno tok vektora}$$

električnog pomaka \vec{D} kroz bilo koju zatvorenu plohu, tj integral $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ po toj plohi, jednak je ukupnom električnom naboju obuhvaćenom tom plohom.

Električni potencijal

$$\text{Definicija: } V(P) = \frac{E_p(P)}{q} = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} + V(P_0); \text{ gdje}$$

je P_0 referentna točka, a P točka u kojoj računamo potencijal.

Razlika potencijala između dvije točke P_1 i P_2 :

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Potencijal točkastog naboja: } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Električno polje je gradijent potencijala:

$$\vec{E} = -\text{grad} V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right), (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) -$$

jedinični vektori

Potencijal izolirane metalne kugle polumjera R :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Potencijalna energija sustava naboja:

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{cijeli prostor}} E^2 dV$$

Gustoća energije u električnom polju: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Kapacitet vodiča: $C = Q/\Delta V$

Kapacitet **pločastog** kondenzatora: $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$

Kapacitet **cilindričnog** kondenzatora:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}; l - \text{duljina cilindra, } r - \text{radius}$$

cilindra, $r_2 > r_1$

Kapacitet **kuglastog** kondenzatora:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}; r - \text{radius kugle, } r_2 > r_1$$

Paralelni spoj: $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$

Serijski spoj: $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots$

Električno polje u dielektriku između paralelnih

$$\text{ploča: } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

$$\text{Energija kondenzatora: } W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q \cdot U}{2}$$

$$\text{Gustoća energije u dielektriku: } w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

Električna struja, Ohmov zakon

$$\text{Ohmov zakon: } I = \frac{U}{R}$$

$$\text{Pad napona: } U = RI$$

$$\text{Električna struja: } I = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{Gustoća struje: } j = \frac{I}{S}$$

$$\text{Serijski spoj otpora: } R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

$$\text{Paralelni spoj otpora: } 1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots$$

$$\text{Električni otpor: } R = \rho \frac{l}{S}$$

$$\text{Ovisnost otpora o temperaturi: } R_2 = R_1 (1 + \alpha \Delta T)$$

$$\text{Veza između vodljivosti i otpornosti: } \sigma = \frac{1}{\rho}; G = \frac{1}{R}$$

$$\text{Električno polje u homogenoj žici: } E = U/l$$

$$\text{Napon na stezaljkama izvora: } U = E - R_u I$$

$$\text{Snaga električne struje: } P = UI$$

$$\text{Snaga na omskome vodiču: } P = I^2 R$$

Kirchhoffova pravila

I. Zbroj jakosti struja koje ulaze u čvorište jednak je zbroju jakosti struja koje izlaze iz čvorišta.

II. U svakoj zatvorenoj petlji zbroj svih elektromotornih sila jednak je zbroju svih padova napona na otpornicima: $\sum_i E_i = \sum_i R_i I_i$

Istosmjerna struja

RC strujni krug s baterijom: $I = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$

Izbijanje kondenzatora preko otpornika R:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

Vremenska konstanta RC kruga: $T = RC$

Izmjenične struje

Efektivna vrijednost periodički promjenjive veličine, npr. struje $i(t)$, definirana je kao

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

Efektivna vrijednost sinusoidalnog napona i struje:

$$U_{ef} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}; I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Induktivni otpor: $R_L = \omega L$

Kapacitivni otpor: $R_C = \frac{1}{\omega C}$

Impedancija: $Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$

Admitancija: $Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$

Ohmov zakon za izmjeničnu struju: $I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y$

Radna snaga izmjenične struje: $P = UI \cos \varphi$

Jalova snaga: $Q = UI \sin \varphi$

Prividna snaga: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Faktor snage: $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$

Rezonantna frekvencija: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Transformatorski omjer: $U_1 : U_2 = I_2 : I_1 = N_1 : N_2$

Trofazni sustav

$$U_R = U_{Rmax} \sin \omega t$$

Trofazni napon: $U_S = U_{Smax} \sin(\omega t + 2\pi/3)$

$$U_T = U_{Tmax} \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

$$I_R = I_{Rmax} \sin \omega t$$

Trofazna struja: $I_S = I_{Smax} \sin(\omega t + 2\pi/3)$

$$I_T = I_{Tmax} \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

Simetrični trofazni sustav u spoju zvijezda

Linijski napon (napon između dvije faze, npr. R i S):

$$U_{RS} = \sqrt{3} \cdot U_{Rmax} \sin(\omega t - \pi/6)$$

Odnos faznih i linijskih napona:

$$U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = \sqrt{3} \cdot U, \text{ gdje je}$$

$U = U_{OR} = U_{OS} = U_{OT}$ fazni napon. Za trokutni spoj vrijedi: $U_{RS} = U_{RT} = U_{ST} = U$

Snaga trofaznih sustava jednaka je zbroju snaga pojedinih faza, a u slučaju simetričnog sustava vrijedi $P = 3 \cdot U \cdot I$, gdje su U i I označeni fazni napon i fazna struja.

MAGNETIZAM I ELEKTROMAGNETIZAM

Magnetsko polje

Magnetska sila između dva naboja koji se gibaju:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{v} \times (\vec{v}' \times \vec{r})$$

Magnetsko polje točkastog naboja:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q'}{r^2} (\vec{v}' \times \vec{r})$$

Gaussov zakon za magnetizam: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Biot-Savartov zakon: $d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$

Jakost magnetskog polja na osi prstena

postavljenog u x-y ravnini: $H_z = \frac{b^2 I}{2(b^2 + z^2)^{3/2}}$, gdje

je b polumjer prstena. Jakost polja u središtu prstena dobije se uvrštavajući $z=0$ u gornju jednadžbu.

Jakost magnetskog polja cilindrične zavojnice -

solenoida: $H_z = \frac{I \cdot n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$, gdje je n broj

zavoja po jedinici duljine duž zavojnice.

Jakost magnetskog polja na udaljenosti a od ravnog

vodiča: $H = \frac{I}{2\pi \cdot a}$

Sile po jedinici duljine između dvaju paralelnih vodiča kroz koje teku struje I_1 i I_2 udaljenih za a :

$$F = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \left(\frac{2I_1 I_2}{a}\right)$$

Ampereov zakon: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

Kružna staza u magnetskom polju: $r = \frac{p}{qB}$

Ciklotronska frekvencija: $f = \frac{qB}{2\pi m}$

Lorentzova sila: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

Sila na segment vodiča: $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

Veza između jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije: $H = \frac{B}{\mu}$, gdje je $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ magnetska permeabilnost.

Elektromagnetska indukcija

Inducirana EMS u vodljivom štapu duljine l koji se giba u magnetskom polju B brzinom v okomitom i na B i na l : $U_{\text{ind}} = vBl$

Faradayev zakon:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \text{ integralni oblik}$$

$$\oint_{\text{zatvoreni put}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\text{Magnetski tok: } \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Međuvodička indukcija: } U_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\text{Samoindukcija: } U_s = -L \frac{dI}{dt}$$

Samoinduktivitet zavojnice po jedinici duljine: $\mu_0 n^2 \pi b^2$, gdje je n broj zavoja po jedinici duljine, a b radius solenoida.

Samoinduktivitet toroidalne zavojnice:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Samoinduktivitet ravnog vodiča:

$$L = 2\mu \cdot l \left(\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - 0,75 \right); r - \text{radius vodiča, } l - \text{duljina vodiča, } l \gg r$$

Samoinduktivitet koaksijalnog kabela:

$$L = 2\mu \cdot l \left(\ln\left(\frac{r_v}{r_u}\right) - 0,25 \right); r_v - \text{vanjski radius, } r_u - \text{unutarnji radius, } l - \text{duljina kabela}$$

$$\text{Magnetska energija u zavojnici: } W_L = \frac{1}{2} LI^2$$

$$\text{Gustoća magnetske energije: } w_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Istosmjerni RL strujni krug

$$\text{Uključivanje: } I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$\text{Isključivanje: } I = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\text{Vremenska konstanta RL kruga: } T = L/R$$

MAXWELLOVE JEDNADŽBE

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2, w_{\text{m}} = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2$$

Elektromagnetski valovi

Valna jednadžba za električno polje \vec{E} :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$\Delta \vec{E} = (\nabla \nabla) \vec{E}$ je Laplaceov operator koji djeluje na vektor \vec{E} :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \Delta E_x \vec{i} + \Delta E_y \vec{j} + \Delta E_z \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}, c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

$$E_0 = vB_0, \vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} (\vec{B} \times \vec{u}), \frac{E_0}{H_0} = \frac{377 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\text{Ukupna gustoća energije: } w = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\text{Poytingov vektor: } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

GEOMETRIJSKA OPTIKA

Zakon loma

$$\frac{\sin u}{\sin l} = \frac{n_2}{n_1}, n = \frac{c}{v}, \sin \bar{u}_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Sferno zrcalo. Povećanje

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}, m = -\frac{b}{a}$$

Planparalelna ploča

$$\Delta = d \sin u \left[1 - \frac{\cos u}{\sqrt{n^2 - \sin^2 u}} \right]$$

Prizma

$$\delta = u_1 - l_1 + u_2 - l_2, A = l_1 + l_2, n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

Sferni dioptrar. Tanka leća

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}, m = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{b}{a},$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f} = J$$

FIZIKALNA OPTIKA

Interferencija

Uvjet za konstruktivnu interferenciju:

optička razlika puta = $m\lambda$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Uvjet za destruktivnu interferenciju:

optička razlika puta = $(2m-1)\frac{\lambda}{2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Youngov pokus: $\frac{\Delta y}{d} = m\lambda$

Tanka ploča: $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 u} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

Newtonovi kolobari:

$$d = \frac{r^2}{2R}$$

$$d_s = \frac{2m-1}{4}\lambda, m = 1, 2, 3, \dots, d_t = \frac{m}{2}\lambda,$$
$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Ogib (Difrakcija)

Jedna pukotina

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 y}{y^2}, y = \frac{d\pi}{\lambda} \sin \alpha$$

uvjet za minimum: $d \sin \alpha = n\lambda$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Dvije pukotine

$$I_D(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi D}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \alpha\right)} \right]^2$$

Optička rešetka

$$I(\alpha) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)} \right]^2$$

uvjet za maksimum: $d \sin \alpha = m\lambda$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

moć razlučivanja rešetke, disperzija spektra:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}, \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \alpha}$$

Polarizacija

Brewsterov zakon: $\tan u_B = (n_2/n_1)$

Malusov zakon: $I = I_0 \cos^2 \varphi$

FOTOMETRIJA

$$d\Phi = I d\Omega, E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I}{r^2} \cos \beta$$

$$d\Phi' = d\Phi \frac{r^2}{r'^2}$$

$$dI = \frac{d^2\Phi}{d\Omega} = L_0 dA \cos \alpha = I_0 \cos \alpha$$

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dA \cos \alpha}, d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \alpha d\alpha d\varphi$$

$$R = \frac{d\Phi}{dA}, dP = J d\Omega$$

KVANTNA PRIRODA SVJETLOSTI

Stefan-Boltzmannov zakon

$$I = \int_0^\infty f(\lambda, T) d\lambda, I = \sigma T^4$$

Wienov zakon: $\lambda_m T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$

Planckov zakon zračenja

$$f(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

$$f(f, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

Fotoelektrični efekt

$$E = hf, \frac{mv^2}{2} \leq hf - W_i$$

Comptonov efekt

$$hf + mc^2 = hf' + \gamma mc^2,$$
$$(\gamma mv)^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2 f f'}{c^2} \cos \vartheta$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

STRUKTURA ATOMA

Bohrov model

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} n^2 \text{ za } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad h\nu = E_n - E_k$$

Magnetski dipolni moment elektrona s orbitalnim momentom količine gibanja

$$\mu_L = \frac{e}{2m} L = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

Magnetski spinski moment elektrona sa spinskim momentom količine gibanja

$$\mu_s = \frac{e}{m} L_s = \frac{e}{m} \hbar \sqrt{s(s+1)}$$

Moseleyev zakon

K-serija $a \approx 1$

$$f = cR \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) (Z - a)^2$$

L-serija $a \approx 7,4$

$$f = cR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) (Z - a)^2$$

Braggov zakon

$$2d \sin \vartheta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De Broglieve relacije

$$\gamma mc^2 = hf, \quad p = \gamma mv = \frac{h}{\lambda}$$

ATOMSKA JEZGRA

Defekt mase

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_A$$

Energija vezanja:

$$E_b = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_A] \cdot c^2$$

$$E_b = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_X] \cdot c^2$$

Zakon radioaktivnog raspada

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \quad N = N_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda}$$

Nuklearne reakcije ($a + X \rightarrow Y + b$), udarni presjek

$$Q = (m_X + m_a) \cdot c^2 - (m_Y + m_b) \cdot c^2, \quad \sigma = \frac{\Delta N}{nN\Delta x}$$

Rutherfordov diferencijalni udarni presjek

za raspršenje čestice (bez spina) mase m i naboja q
= ze na jezgri (naboj $Q = Ze$)

$$\sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 4m^2 v^4} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

TABLICA ELEMENATA

Z	X	A	Z	X	A	Z	X	A	Z	X	A	Z	X	A
1.	H	1,0079	23.	V	50,9415	45.	Rh	102,9055	67.	Ho	164,9303	89.	Ac	227,0278
2.	He	4,0026	24.	Cr	51,9961	46.	Pd	106,42	68.	Er	167,26	90.	Th	232,0381
3.	Li	6,941	25.	Mn	54,9381	47.	Ag	107,8682	69.	Tm	168,9342	91.	Pa	231,0359
4.	Be	9,0122	26.	Fe	55,847	48.	Cd	112,411	70.	Yb	173,04	92.	U	238,0289
5.	B	10,811	27.	Co	58,9332	49.	In	114,82	71.	Lu	174,967	93.	Np	237,0482
6.	C	12,011	28.	Ni	58,69	50.	Sn	118,710	72.	Hf	178,49	94.	Pu	(244)
7.	N	14,0067	29.	Cu	63,546	51.	Sb	121,75	73.	Ta	180,9479	95.	Am	(243)
8.	O	15,9994	30.	Zn	65,39	52.	Te	127,60	74.	W	183,85	96.	Cm	(247)
9.	F	18,9984	31.	Ga	69,723	53.	I	126,9045	75.	Re	186,207	97.	Bq	(247)
10.	Ne	20,1797	32.	Ge	72,61	54.	Xe	131,29	76.	Os	190,2	98.	Cf	(251)
11.	Na	22,9898	33.	As	74,9216	55.	Cs	132,9054	77.	Ir	192,22	99.	Es	(252)
12.	Mg	24,3050	34.	Se	78,96	56.	Ba	137,327	78.	Pt	195,08	100.	Fm	(257)
13.	Al	26,9815	35.	Br	79,904	57.	La	138,9055	79.	Au	196,9665	101.	Md	(258)
14.	Si	28,0855	36.	Kr	83,80	58.	Ce	140,115	80.	Hg	200,59	102.	No	(259)
15.	P	30,9738	37.	Rb	85,4678	59.	Pr	140,9077	81.	Tl	204,3833	103.	Lr	(260)
16.	S	32,066	38.	Sr	87,62	60.	Nd	144,24	82.	Pb	207,2	104.	Rf	(261)
17.	Cl	35,4527	39.	Y	88,9059	61.	Pm	(145)	83.	Bi	208,9804	105.	Ha	(262)
18.	Ar	39,948	40.	Zr	91,224	62.	Sm	150,36	84.	Po	(209)	106.		(263)
19.	K	39,0983	41.	Nb	92,9064	63.	Eu	151,965	85.	At	(210)	107.		(262)
20.	Ca	40,078	42.	Mo	95,94	64.	Gd	157,25	86.	Rn	(222)	108.		(265)
21.	Sc	44,9559	43.	Tc	(98)	65.	Tb	158,9253	87.	Fr	(223)	109.		(266)
22.	Ti	47,88	44.	Ru	101,07	66.	Dy	165,50	88.	Ra	226,0254			

Z – redni broj

X – simbol kemijskog elementa

A – atomska masa

VAŽNIJE FIZIKALNE KONSTANTE

brzina svjetlosti u vakuumu.....	$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
elementarni električni naboj.....	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
dielektrična konstanta vakuuma.....	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
permeabilnost vakuuma.....	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
gravitacijska konstanta.....	$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Planckova konstanta.....	$h = 6,626076 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
reducirana Planckova konstanta.....	$\hbar = 1,054573 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmannova konstanta.....	$k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
plinska konstanta.....	$R = 8,314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$
Avogadrov broj.....	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
normirani molarni volumen plina.....	$V_{mo} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}$
Loschmidtov broj.....	$n_L = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Stefan-Boltzmannova konstanta.....	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Rydbergova konstanta.....	$R_\infty = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
masa mirovanja elektrona.....	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
masa mirovanja protona.....	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
masa mirovanja neutrona.....	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
atomska masena konstanta.....	$m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
energijski ekvivalent atomske masene konstante.....	$\Delta E_u = 931,478 \text{ MeV}$
akceleracija slobodnog pada.....	$g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$
Faradayeva konstanta.....	$F = 96485,31 \text{ C/mol}$
Comptonova valna duljina elektrona.....	$\lambda_C = 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Bohrov polumjer.....	$r_0 = 0,529177 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
konstanta fine strukture.....	$\alpha = 7,297353 \cdot 10^{-3}$
srednji polumjer Zemlje.....	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
masa Zemlje.....	$5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
polumjer Sunca.....	$6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$
masa Sunca.....	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
polumjer Mjeseca.....	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$
masa Mjeseca.....	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca.....	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
srednja udaljenost središta Zemlje i Mjeseca.....	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$
ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca.....	$365,25 \text{ dana}$
ophodno vrijeme Mjeseca oko Zemlje.....	$27,32 \text{ dana} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$
kutna brzina vrtnje Zemlje oko svoje osi.....	$7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$

TABLICE

Svojstva nekih čvrstih materijala

Tvar	Gustoća kg/m^3	Youngov modul GN/m^2	Specifični toplinski kapacitet $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	Koeficijent linearnog rastezanja 10^{-6}K^{-1}
aluminij	2 700	70	900	24
bakar	8 900	110	390	17
čelik	7 700	200	460	12
led	900	—	2 100	—
nikal	8 900	210	520	18
olovo	11 300	16	130	29
platina	21 500	170	130	9
pluto	250	—	2 050	—
srebro	10 500	85	230	19
staklo	2 500	50	800	9
volfram	19 200	360	150	4,5
zlat	19 300	78	130	15
željezo	7 900	180	460	12

Svojstva nekih kapljevina

Tekućina	Gustoća kg/m^3	Specifični toplinski kapacitet $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	Koeficijent volumnog rastezanja 10^{-3}K^{-1}
alkohol (etanol)	790	2 500	1,1
benzin	700	2 100	0,95
morska voda	1 030	3 930	0,24
voda	1 000	4 190	0,20
živa	13 600	140	0,18

Svojstva nekih plinova

Plin	Gustoća (0 °C i 1,01 bar) kg/m^3	Specifični toplinski kapacitet c_v $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
dušik, N_2	1,25	740
helij, He	0,179	3 150
kisik, O_2	1,43	650
ugljični dioksid, CO_2	1,98	650
vodik, H_2	0,09	10 000
zrak	1,293	720

Koeficijent viskoznosti

Tekućina	$\eta/\text{Pa s}$ (20 °C)	$\eta/\text{Pa s}$ (70 °C)	$\eta/\text{Pa s}$ (100 °C)
voda	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$
etanol	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	—
živa	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	—
maslinovo ulje	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	—
glicerol	$8,6 \cdot 10^{-1}$	—	—
zrak	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	—
vodik	$0,9 \cdot 10^{-5}$	—	—
motorno ulje (SAE 30)	—	—	$9,0 \cdot 10^{-3}$

Vrijeme poluraspada $T_{1/2}$ nekih radioaktivnih izotopa

Izotop	Vrijeme poluraspada
Aktinij (izotop ^{221}Ac)	21,773 godina
Radij (izotop ^{226}Ra)	1600,0 godina
Radon (izotop ^{222}Rn)	3,8235 dana
Kobalt (izotop ^{60}Co)	5,27 godina
Klor (izotop ^{38}Cl)	37,24 minute
Fosfor (izotop ^{32}P)	14,262 dana
Stroncij (izotop ^{90}Sr)	28,78 godina
Natrij (izotop ^{24}Na)	14,9590 sata
Ugljik (izotop ^{14}C)	5730 godina

Valne duljine Balmerove serije u spektru vodikovog atoma ($n_k = 2$)

Gornji nivo n_p	Valna duljina (mjerena u zraku) $\lambda/10^{-10} \text{ m}$
3	6562,80
4	4861,33
5	4340,47
6	4101,74
7	3970,07
8	3889,05

Energija vezanja jezgri

Izotop	Masa u	Defekt mase u	Energija vezanja MeV	Energija vezanja po nukleonu MeV
^2_1H	2,01410	0,00238	2,22	1,11
^3_1H	3,01605	0,00910	8,46	2,82
^4_2He	4,00260	0,00827	7,72	2,57
^7_3Li	7,01600	0,04213	39,22	5,60
$^{12}_6\text{C}$	12,00000	0,09858	91,76	7,64
$^{14}_7\text{N}$	14,00307	0,11236	104,57	7,47
$^{16}_8\text{O}$	15,99491	0,13661	127,20	7,97
$^{27}_{13}\text{Al}$	26,98154	0,2415	224,8	8,33
$^{52}_{24}\text{Cr}$	51,94051	0,4866	453,0	8,71
$^{208}_{82}\text{Pb}$	207,97663	1,7578	1636	7,87
$^{235}_{92}\text{U}$	235,04393	1,915	1784	7,60
$^{238}_{92}\text{U}$	238,05078	1,936	1803	7,58

Gaussova ili normalna razdioba

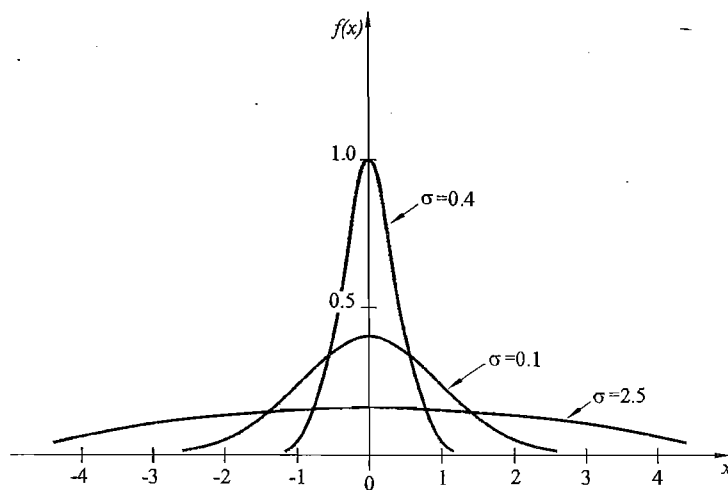
U mnogim fizikalnim mjerenjima razdioba učestalosti pojedinačnih mjerenja oko srednje vrijednosti najčešće ima oblik normalne razdiobe ili joj se, barem, dobro približava. Gustoća vjerojatnosti $P(x)$ opisuje vjerojatnost da neka mjerena vrijednost (veličina) x bude u intervalu x i $x+dx$. Prema tome, gustoća vjerojatnosti ima sljedeći matematički oblik:

$$P(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1a)$$

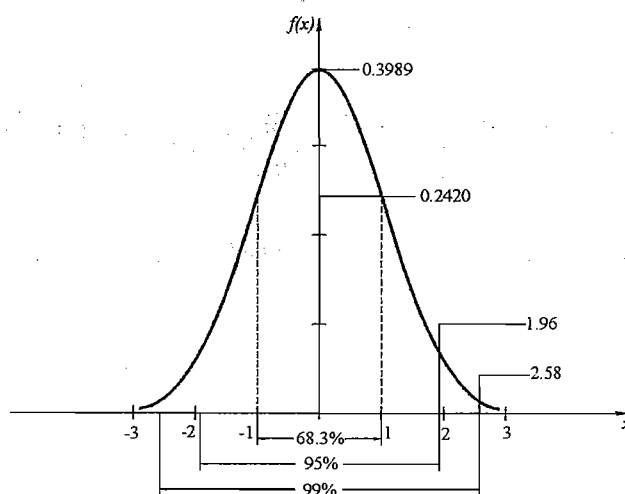
u kojoj je

$$f(x, \mu, \sigma^2) \equiv y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2a)$$

Gaussova funkcija razdiobe. Parametar σ opisuje rasipanje ili širinu raspodjele i zove se **standardna devijacija**, dok se njezin kvadrat σ^2 zove **varijancom raspodjele**. Parametar μ jest **aritmetička sredina** razdiobe.



Sl. 1. Primjeri Gaussove razdiobe $f(x, \sigma)$ za $\mu=0$ i različite vrijednosti standardne devijacije (širine raspodjele): $\sigma=0.4$, $\sigma=1.0$ i $\sigma=2.5$



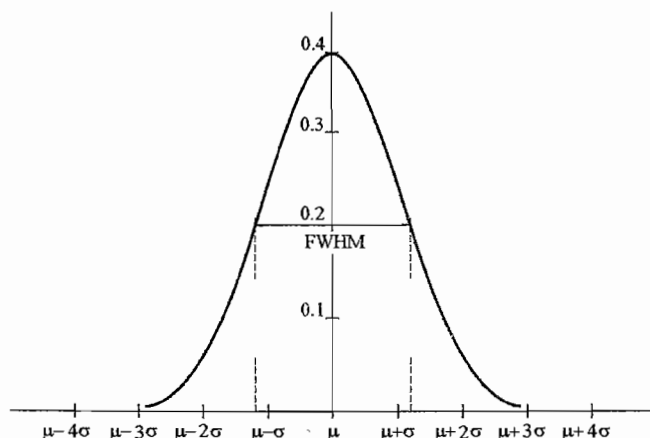
Sl. 2. Standardna Gaussova razdioba ($\mu=0$ i $\sigma=1$)

Dio podataka (događaja) koji prema takvoj razdiobi pada u područje $(\mu \pm n\sigma)$, odgovara integralu funkcije (vjerojatnosti) iz (1a). Navodimo karakteristične vrijednosti područja što se najčešće koriste u analizi podataka mjerenja:

$\mu \pm 1\sigma$	68,26 %	ili $\sim 2/3$
$\mu \pm 1,64\sigma$	90 %	
$\mu \pm 1,96\sigma$	95 %	
$\mu \pm 2\sigma$	95,44 %	
$\mu \pm 3\sigma$	99,74 %	ili ~ 1

Dakle, 1/3 izmjerenih podataka je izvan jednostrukog ($\pm 1\sigma$), a gotovo zanemarivi dio izvan trostrukog ($\pm 3\sigma$) područja rasipanja. Moguće je i obratno tumačenje: unutar granica područja pouzdanosti, izmjereni će rezultati padati s određenom statističkom sigurnošću. One, naprimjer, iznose:

$\mu \pm 0,67\sigma$	50 %
$\mu \pm 1,96\sigma$	95 %
$\mu \pm 2,58\sigma$	99 %



Sl. 3. Puna širina na polovici maksimuma (FWHM): $FWHM=2.35\sigma$

U mjerenjima ili u pokusima u fizici, ne raspolazemo uvijek s velikim brojem pojedinačnih rezultata. Nisu nam tada poznati niti μ niti σ . Zaključke o njihovim vrijednostima valja izvesti na skupu pojedinačnih mjerenja. Najbolja procjena vrijednosti μ i σ iz malog skupa pojedinačnih mjerenja se vrši izračunavanjem srednjaka:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3a)$$

te empirijske srednje kvadratne pogreške (varijance) s^2 u skupu podataka, prema formuli:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4a)$$

Rasipanje srednjih vrijednosti, zapravo veličinu standardne devijacije aritmetičke sredine najbolje procijenjuje sljedeći izraz:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{s^2}{n} \quad \text{ili} \quad \Delta x \equiv \sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5a)$$



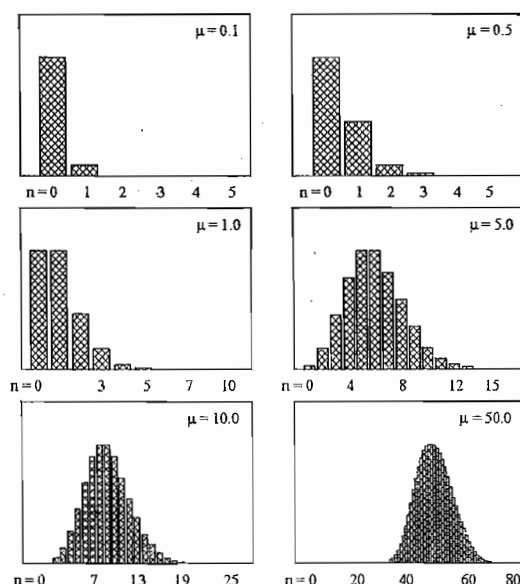
U ovom slučaju, standardna devijacija aritmetičke sredine je jednaka standardnoj devijaciji podataka. Ovo je slučaj kada su podaci normalno distribuirani. U ovom slučaju, standardna devijacija aritmetičke sredine je jednaka standardnoj devijaciji podataka. Ovo je slučaj kada su podaci normalno distribuirani.

Poissonova razdioba

Normalnom Gaussovom razdiobom se općenito ne mogu obuhvatiti svi događaji (podaci) što nastaju tijekom raznorodnih mjerenja u sustavima, detektorima i instrumentaciji u laboratorijima te u prirodnim pojavama. Takve su pojave, naprimjer, mjerenje radioaktivnosti ili detekcija čestica u eksperimentalnoj fizici jezgre i čestica. Tada je stvarni broj događaja u mjernim intervalima relativno mali. Rezultati su, zatim, samo cjelobrojne mjerne vrijednosti, premda srednja vrijednost ne mora biti cjelobrojna. Ovakvim uvjetima i događajima odgovara Poissonova razdioba jer Gaussova nije više prikladna. Poissonovom (diskretnom) razdiobom računamo vjerojatnost W nenegativnog cjelobrojnog događaja n ($n = 0, 1, 2, \dots$) prema izrazu:

$$W(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad (6a)$$

Srednja vrijednost μ jest parametar koji može biti bilo koji nenegativni realni broj.



Sl. 4. Primjeri Poissonove razdiobe s različitim srednjim vrijednostima μ .
Na apscisi su cjelobrojne vrijednosti događaja.

Poissonova se razdioba primjenjuje za opis događaja u nekom intervalu vremena ili prostora, kad oni nastaju pod sljedećim uvjetima:

- broj događaja u nekom podintervalu od x je neovisan od broja u bilo kojem drugom podintervalu,
- vjerojatnost jednog događaja u Δx jest $\lambda \Delta x$, a vjerojatnost dva ili više događaja iščezava kad $\Delta x \rightarrow 0$,
- λ je neovisan o x .

U takvim uvjetima, za Poissonovu razdiobu vrijedi da će njena srednja (očekivana) vrijednost biti,

$$\mu = \lambda x \quad (7a)$$

dok je rasipanje rezultata opisano *standardnom devijacijom* σ kao:

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (8a)$$

Osvrtom na gornje relacije (6a), vidimo da vjerojatnost da se događaj neće pojaviti iznosi:

$$W(0) = e^{-\mu} \quad (9a)$$

U slučaju velikih srednjih vrijednosti μ (≥ 10), Poissonova se razdioba *počinje vladati asimptotski*, prelazi u Gaussovu razdiobu. Razdioba (diskretnih) događaja n se aproksimira Gaussovom funkcijom razdiobe sa srednjom vrijednošću μ i varijansom $\sigma^2 = \mu$ za n kao kontinuiranu veličinu.

Ističemo, na kraju, da je Poissonovoj razdiobi od svakodnevnih prirodnih pojava najbolje prilagođeno mjerenje *pozadinskog (kozmičkog) radioaktivnog zračenja* (mioni i fotoni).